BIẾN ĐỔI FOURIER TRONG KHÔNG GIAN CÁC HÀM TĂNG CHẬM $S'(\mathbb{R}^n)$

FOURIER TRANFORM IN THE SPACE OF FUNCTIONS INCREASES SLOWLY $S'(\mathbb{R}^n)$

Ngày nhận bài : 31/12/2020
Ngày nhận kết quả phản biện : 15/5/2021
Ngày duyệt đăng : 27/5/2021

ThS. Nguyễn Thị Minh Khai
Đại học Tài chính - Kế toán

TÓM TẮT

Trong bài báo này tác giả trình bày trình bày chi tiết về không gian các hàm suy rộng tăng chậm $S'(\mathbb{R}^n)$ *và phép biến đổi Fourier trong không gian các hàm tăng chậm* $S'(\mathbb{R}^n)$.

Từ khóa: phép biến đổi Fourier, không gian các hàm tăng chậm, biến đổi Fourier trong không gian các hàm tăng chậm $S'(\mathbb{R}^n)$.

ABSTRACT

In this paper, the author presents details about space of functions increases slowly $S'(\mathbb{R}^n)$ *and the Fourier transform in the space of functions increases slowly* $S'(\mathbb{R}^n)$.

Key words: Fourier transform, space of functions increases slowly, fourier transform in the space of functions increases slowly $S'(\mathbb{R}^n)$.

1. Đặt vấn đề

Phép biến đổi Fourier của hàm suy rộng có ý nghĩa rất quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, phương trình vật lý toán và có nhiều ứng dụng vào lý thuyết phương trình tích phân cũng như trong nhiều lĩnh vực khác. Vì vậy việc trang bị kiến thức về phép biến đổi Fourier trong không gian các hàm suy rộng là rất cần thiết trong nghiên cứu khoa học. Trong [4] tác giả đã trình bày chi tiết về không gian các hàm suy rộng giảm nhanh $S(\mathbb{R}^n)$ và phép biến đổi Fourier trong không gian các hàm suy rộng giảm nhanh $S(\mathbb{R}^n)$. Trong bài báo này tác giả sẽ trình bày về không gian các hàm suy rộng tăng chậm $S'(\mathbb{R}^n)$ và phép biến đổi Fourier trong không gian các hàm suy rộng tăng chậm $S'(\mathbb{R}^n)$.

2. Không gian các hàm suy rộng tăng chậm $S'(\mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 2.1. Mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục trong $S(\mathbb{R}^n)$ được gọi là một hàm suy rộng tăng chậm. Tập hợp tất cả các hàm suy rộng tăng chậm trong $\mathbb{R}^n$ được ký hiệu là $S'(\mathbb{R}^n)$.

Dãy hàm $f_1, f_2, ..., f_k, ... \in S'(\mathbb{R}^n)$, gọi là hội tụ đến hàm $f \in S'(\mathbb{R}^n)(f_k \to f)$ khi $k \to \infty$ nếu $\varphi \in S(\mathbb{R}^n), \langle f_k, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ khi $k \to \infty$. Tập $S'(\mathbb{R}^n)$ cùng với khái niệm hội tụ trên cho ta không gian các hàm suy rộng tăng chậm $S'(\mathbb{R}^n)$.

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$. Do đó sự hội tụ trong $S'(\mathbb{R}^n)$ kéo theo sự hội tụ trong $D'(\mathbb{R}^n)$.

Khi nào một hàm f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $S(\mathbb{R}^n)$ hay $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Ta xét định lý sau đây.

Định lý 2.1. *(Định lý L.Schwartz, [9], Thm.p.115)*

Điều kiện cần và đủ để $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ là một phím hàm tuyến tính liên tục trên $S(\mathbb{R}^n)$, tức là

$f \in S'(\mathbb{R}^n)$, là tồn tại số $C > 0$ và một số tự nhiên m sao cho $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ta có:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \le C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^m \sum_{|\alpha| \le m} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Mệnh đề 2.1.

Cho $f_k, f \in S'(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \ldots$ Dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ trong $S'(\mathbb{R}^n)$ đến f, nếu:

i) Có một số tự nhiên m và một số dương C sao cho

$$|\langle f_k, \varphi \rangle| \le C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^m \sum_{|\alpha| \le m} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

ii) Dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ trong $D'(\mathbb{R}^n)$ đến f.

Ví dụ 2.1. Phiếm hàm $P\left(\frac{1}{x}\right): f \to \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\|x\| \ge \varepsilon} \frac{1}{x} f(x)dx$ thuộc vào $S'(\mathbb{R}^n)$.

Thật vậy, trước tiên ta chỉ ra rằng $P\left(\frac{1}{x}\right)$ được xác định trong $S'(\mathbb{R}^n)$. Cho $f \in S(\mathbb{R}^n)$

Ta có: $\int_{\|x\| \ge \varepsilon} \frac{1}{x} f(x)dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx$

Tuy nhiên, $\frac{f(x) - f(-x)}{x} \to 2f'(0)$ khi $x \to 0$, do đó $\frac{f(x) - f(-x)}{x}$ khả tích trên $[0, \varepsilon]$ với $\varepsilon > 0$ và $P\left(\frac{1}{x}\right)$ được xác định tại $x = 0$.

Với $x > 0$ thì:

$$\left|\frac{f(x) - f(-x)}{x}\right| = \left|\frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f'(t)dt\right|$$

$$\le \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f'(t)dt \le 2\|f'\|_\infty$$

Rõ ràng, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ tuyến tính nên chúng ta chỉ cần kiểm tra nó liên tục trên $S(\mathbb{R}^n)$.

Ta có:

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), f \right\rangle = \left| \int_0^1 \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx + \int_1^\infty \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx \right|$$

$$\le 2\int_0^1 \|f'\|_\infty dx + \int_1^\infty |f(x)| + |f(-x)| x \frac{dx}{x^2}$$

$$\le 2\|f'\|_\infty + 2\|xf(x)\|_\infty \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \le 2\|f\|_{0,1} + 2\|f\|_{1,0}$$

Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Định nghĩa về hàm suy rộng tăng chậm và cách xác định một hàm suy rộng tăng chậm trong định lý 2.1 là không mâu thuẫn. Điều này được chứng minh bởi định lý sau đây.

Định lý 2.2. *([1], ĐL. 1.16).*

i) Cho hàm suy rộng tăng chậm $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Khi đó ta có thể thác triển f thành phiếm hàm tuyến tính liên tục từ $S(\mathbb{R}^n)$ vào $\mathbb{C}$.

ii) Với mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục $f: S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ đều có thể thu hẹp trên $D(\mathbb{R}^n)$ là một hàm suy rộng tăng chậm.

Mệnh đề 2.2.

Nếu f là một hàm suy rộng hữu hạn với giá compact, tức $f \in \varepsilon'(\mathbb{R}^n)$ thì f thuộc $S'(\mathbb{R}^n)$ và

$$\langle f,\varphi\rangle=\langle f,\eta\varphi\rangle,\varphi\in S.$$

Trong đó $\eta\in D$ và $\eta=1$ trong lân cận của giá của hàm f.

3. Biến đổi Fourier trong không gian các hàm suy rộng $S'(\mathbb{R}^n)$

Ở mục này tác giả đề cập đến phép biến đổi Fourier trong không gian các hàm suy rộng tăng chậm $S'(\mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 3.1. Cho $f\in S'(\mathbb{R}^n)$. Biến đổi Fourier của hàm suy rộng f kí hiệu là $F[f]$ là hàm suy rộng tăng chậm xác định bởi

$$\langle F[f],\varphi\rangle=\langle f,F[f]\rangle \text{ với } \varphi\in S(\mathbb{R}^n).$$

Và phép biến đổi ngược kí hiệu là $F^{-1}[f]$ được xác định bởi

$$\langle F^{-1}[f],\varphi\rangle=\langle f,F^{-1}[f]\rangle \text{ với } \varphi\in S(\mathbb{R}^n).$$

Ví dụ 3.1.

$$F[\delta]=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$$

Thật vậy, với $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\langle F[\delta],\varphi\rangle=\langle \delta,F[\varphi]\rangle=F[\varphi](0)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(0,x)}\varphi(x)dx=(2\pi)\langle 1,\varphi\rangle.$$

Hơn nữa, $F^{-1}[\delta]=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ trong $S'(\mathbb{R}^n)$.

Ví dụ 3.2.

$$F[1]=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta.$$

Thật vậy, với $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\langle F[1],\varphi\rangle=\langle 1,F[\varphi]\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}F[\varphi](\xi)d\xi$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(0,\xi)}F[\varphi]d\xi=(2\pi)^{\frac{n}{2}}F^{-1}F[\varphi](0)$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\varphi(0)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle\delta,\varphi\rangle.$$

Mệnh đề 3.1.

i) F,F^{-1} là các ánh xạ liên tục trên $S'(\mathbb{R}^n)$.

ii) $F^{-1}\big[F[f]\big]=f=F\big[F^{-1}[f]\big],f\in S'(\mathbb{R}^n)$.

Từ đó suy ra phép biến đổi Fourier F là đẳng cấu tuyến tính liên tục trên $S'(\mathbb{R}^n)$ với ánh xạ ngược là phép biến đổi ngược F^{-1}.

Chứng minh.

i) Giả sử $f_n\to f$ trong $S'(\mathbb{R}^n)$. Khi đó $\langle f_n,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle,\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$.

Vì vậy $\langle F[f_n],\varphi\rangle=\langle f_n,F[\varphi]\rangle\to\langle f,F[\varphi]\rangle=\langle F[f],\varphi\rangle$.

Suy ra $F[f_n]\to F[f]$ trong $S'(\mathbb{R}^n)$.

Với phép biến đổi ngược ta làm tương tự.

ii) Ta có $\langle F^{-1}\big[F[f]\big],\varphi\rangle=\langle f,F\big[F^{-1}[\varphi]\big]\rangle$

$$=\langle f,\varphi\rangle=\langle f,F^{-1}\big[F[\varphi]\big]\rangle=\langle F\big[F^{-1}[f]\big],\varphi\rangle,\varphi\in S'(\mathbb{R}^n).$$

Sau đây tác giả đề cập đến phép biến đổi Fourier $F_x[f]$ đối với biến $x=(x_1,x_2,..,x_n)$.

Cho $f(x,y)\in S'(\mathbb{R}^{n+m})$, trong đó $x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^m$, giả sử $\varphi(\xi,y)\in S(\mathbb{R}^{n+m})$

$$\langle F_x[f],\varphi\rangle=\langle f,F_\xi[\varphi]\rangle$$

Trong đó $F_\xi[\varphi](x,y)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi,y)e^{-i(\xi,x)}d\xi\in S(\mathbb{R}^{n+m})$.

Toán tử $F_\xi[\varphi]$ là toán tử tuyến tính liên tục từ $S(\mathbb{R}^{n+m})$ vào $S(\mathbb{R}^{n+m})$ nên $F_x[f](\xi,y)$ là hàm suy rộng trong $S'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Mệnh đề 3.2.

Cho $f\in S'(\mathbb{R}^n),\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ ta có

$F[D^\alpha f]=(ix)^\alpha F[f]$ và $F\left[(-ix)^\beta f\right]=D^\beta F[f]$.

Tổng quát: $(ix)^\alpha D^\beta F[f]=F\left[D^\alpha(-ix)^\beta f\right]$.

Chứng minh.

Với $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ thì

$$\langle (ix)^\alpha F[f],\varphi\rangle=\langle F[f],(ix)^\alpha\varphi\rangle=\langle f,F[(ix)^\alpha\varphi]\rangle$$
$$=\langle f,(-D)^\alpha F[\varphi]\rangle=\langle D^\alpha f,F[\varphi]\rangle=\langle F[D^\alpha f],\varphi\rangle.$$

Tương tự
$$\langle D^\beta F[f],\varphi\rangle=\langle F[f],(-D)^\beta\varphi\rangle=\langle f,F[(-D)^\beta\varphi]\rangle$$
$$=\langle f,(-ix)^\beta F[\varphi]\rangle=\langle (-ix)^\beta f,F\varphi\rangle=\langle F[(-ix)^\beta f],\varphi\rangle$$

Mệnh đề 3.3.

Với mọi $f\in S'(\mathbb{R}^n)$ ta có:

i) $F[f(x-h)]=e^{-i(h,\xi)}F[f]$, với $\xi,h\in\mathbb{R}^n$.

ii) $F\left[e^{-i(x,h)}f\right](\xi)=F[f](\xi+h)$, với $\xi,h\in\mathbb{R}^n$.

iii) $F^{-1}[f](x)=F[f](-x)=F[f(-\xi)]$.

Chứng minh.

i) Với $\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\langle F[f(x-h)],\varphi\rangle=\langle f(x-h),F[\varphi]\rangle=\langle f,F[\varphi](x+h)\rangle$$
$$=\langle f,F[\varphi e^{-i(h,\xi)}]\rangle=\langle F[f],e^{-i(h,\xi)}\varphi\rangle=\langle e^{-i(h,\xi)}F[f],\varphi\rangle.$$

ii) Theo i) với mọi $\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\langle F[f](\xi+h),\varphi\rangle=\langle F[f],\varphi(\xi-h)\rangle=\langle f,F[\varphi(\xi-h)]\rangle$$
$$=\langle f,e^{-i(h,x)}F[\varphi]\rangle=\langle e^{-i(h,x)}f,F[\varphi]\rangle=\langle F[e^{-i(h,x)}f],\varphi\rangle.$$

iii) Với $\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\langle F^{-1}[f](x),\varphi\rangle=\langle f,F^{-1}[\varphi](x)\rangle=\langle f,F[\varphi](-x)\rangle$$
$$=\langle F[f](-x),\varphi\rangle=\langle F[f(-\xi)],\varphi\rangle.$$

Do vậy $F^{-1}[f(x)]=F[f](-x)=F[f(-\xi)]$.

Mệnh đề 3.4. *([9],p.127)* Cho $f,g \in S'(\mathbb{R}^n)$ khi đó:

$$F[f(x).g(y)] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F_x[f(x).F[g](\eta)]$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} F_y[F[f](\xi).g(y)] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F[f](\xi).F[g](\eta).$$

Chứng minh.

Với mọi $\forall\varphi(\xi,\eta) \in S(\mathbb{R}^{n+m})$ ta có

$$\langle F[f(x).g(y)],\varphi\rangle = \langle f(x).g(y),F[\varphi]\rangle$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle f(x),\langle g(y),F_\eta F_\xi[\varphi]\rangle\rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle f(x),\langle F[g],F_\xi(\varphi)\rangle\rangle$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle f(x).F[g](\eta),F_\xi[\varphi]\rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle F_x[f(x).F[g](\eta)],\varphi\rangle$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle F[g](\eta),\langle f(x),F_\xi[\varphi]\rangle\rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle F[g](\eta),\langle F[f](\xi),\varphi\rangle\rangle$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle F[f](\xi).F[g](\eta),\varphi\rangle.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đặng Anh Tuấn (2005), *Lý thuyết hàm suy rộng và không gian Sobolev (Bài giảng SĐH)*, Hà Nội
2. Lê Viết Ngư (2011), *Hàm Suy Rộng (Bài giảng SĐH)*, Đại học Huế.
3. Nguyễn Minh Chương - Nguyễn Minh Trí - Lê Quang Trung (1995), *Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng*, Nhà xuất bản khoa học kĩ thuật, Hà Nội.
4. Nguyễn Thị Minh Khai, Biến đổi Fourier trong không gian các hàm giảm nhanh $S(\mathbb{R}^n)$, Tạp chí Khoa học Tài chính Kế toán số 20.
5. Hormander.L., (1985), *The analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer - Verlag.
6. Machael Reiter, Arthur Schuster (2008), *Fourier transform and Sobolev Space*, Summer Term.
7. Markus Harju (2007), *Fourier transform and distribution,* Valeriy Seroy University of Oulu.
8. Olga Goncharova (2001-2002), *Distribution and Fourier transform*, Winter term.
9. Vladimirov, V.S (2002), *Methods of the Theory of Genneralized*, Steklov Mathematical Institute Moscow, Russia.