ĐỊNH LÝ VỀ CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY TRONG HÌNH HỌC VỚI MÔ HÌNH NỬA MẶT PHẲNG POINCARÉ, MỘT ÁP DỤNG

Lê Hào*

Trường Đại học Phú Yên

Ngày nhận bài: 25/8/2020; Ngày nhận đăng: 08/01/2021

Tóm tắt

Trong một bài báo trước đây, chúng tôi trình bày Định lí về điều kiện thẳng hàng của các điểm Lobachevsky trong hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré. Áp dụng kết quả từ bài báo đó, chúng tôi thu được ***Định lí 2.1*** *về điều kiện đồng quy của các đường thẳng Lobachevsky và nêu một áp dụng của Định lý này.*

Từ khóa: *Mô hình nửa mặt phẳng Poincaré, đoạn thẳng Lobachevsky, đường thẳng Lobachevsky, độ dài đại số Lobachevsky.*

1. Giới thiệu

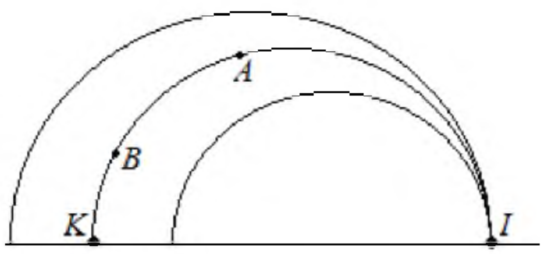
Ta xét nửa mặt phẳng Poincaré: $H^2 = \{(x,y) \in R^2 / y > 0\} = \{z \in C / \operatorname{Im} z > 0\}$ nằm trong mặt phẳng E^2 với hệ tọa độ trực chuẩn *Oxy*. Mỗi điểm thuộc H^2 gọi là điểm Lobachevsky.

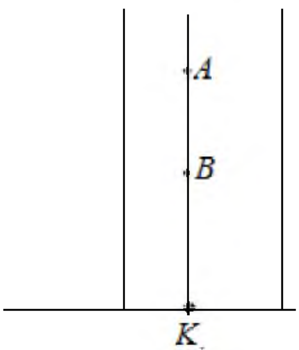
Nửa đường thẳng mở nằm trong H^2 trực giao với *Ox* tại điểm thuộc *Ox*, hay nửa đường tròn mở nằm trong H^2 có tâm thuộc *Ox*, được gọi là đường thẳng Lobachevsky (*còn gọi là đường thẳng Lob*), mỗi cung đoạn của nó là một đoạn thẳng Lobachevsky (*còn gọi là đoạn thẳng Lob*).

Định nghĩa 1.1. *Xét đoạn thẳng Lob nối hai điểm A, B ứng với cung có phương trình tham số* $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ *với* $\gamma(s_1) = A$, $\gamma(s_2) = B$ $(s_1 < s_2)$. *Khi đó độ dài Lobachevsky của đoạn thẳng Lob đó là:*

$$\rho(AB) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\frac{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}{(y(s))^2}}\, ds$$

Trong bài báo trước đây (Lê Hào, 2018, tr.3) chúng tôi đã đề cập đến lớp các trục có chung mút âm vô tận.





* Email: lehaodhpy@gmail.com

Trong lớp trục có chung một mút âm vô tận, một cung (đoạn) định hướng bất kì nối từ *A* đến *B* và nằm trên một trục có độ dài đại số Lobachevsky $L(\overline{AB})$.

- Ứng với lớp trục cong thì:

$$L(\overline{AB}) = \ln\left(\frac{A-K}{B-K} : \frac{A-I}{B-I}\right)$$ (*I, K* tương ứng là mút âm, dương vô tận của trục)

- Ứng với lớp trục thẳng thì: $L(\overline{AB}) = \ln\left(\frac{A-K}{B-K}\right)$ (*K* là mút dương vô tận)

Ta luôn có: $L(\overline{AB}) = \rho(AB)$ hay $L(\overline{AB}) = -\rho(AB)$ tùy theo hướng dọc theo cung đoạn định hướng từ A đến B là dương hay âm (Lê Hào, 2018).

Chúng tôi đề cập các giá trị sau:

$$sh(AB) = \frac{e^{\rho(AB)} - e^{-\rho(AB)}}{2}$$

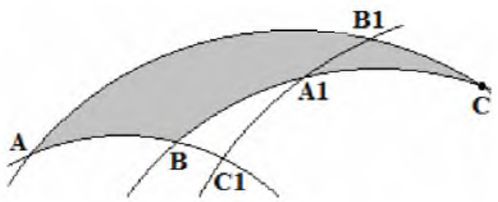
$$sh(\overline{AB}) = \frac{e^{L(\overline{AB})} - e^{-L(\overline{AB})}}{2}$$

Rõ ràng $sh(AB) = \left|sh(\overline{AB})\right|$

Lấy cảm hứng từ định lý Menelaus của hình học Euclide trong E^2 và áp dụng kết quả từ [1] chúng tôi đã chứng minh được định lý sau:

Định lý 1.2. *Cho tam giác Lobachevsky với các đỉnh A, B, C. Gọi* A_1, B_1, C_1 *tương ứng là các điểm nằm trên các đường thẳng Lob (BC), (CA), (AB) và không trùng với các đỉnh A, B, C. Khi đó* A_1, B_1, C_1 *thẳng hàng khi và chỉ khi:*

$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})}\frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})}\frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})} = 1$$ (Lê Hào, 2020, tr.13)



Lấy cảm hứng từ Định lý Ceva của Hình học Euclide trong E^2 và áp dụng **Định lí 1.2** chúng tôi thu được **Định lý 2.1,** cho ta điều kiện đồng quy của ba đường thẳng Lobachevsky đi qua các đỉnh của một tam giác Lobachevsky.

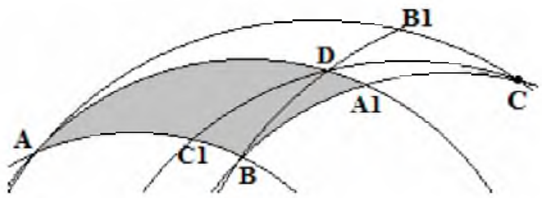
2. Kết quả chính

Định lý 2.1. *Cho tam giác Lobachevsky với các đỉnh A, B, C. Gọi* A_1, B_1, C_1 *tương ứng là* *các điểm nằm trên các đường thẳng Lob (BC), (CA), (AB) và không trùng với các đỉnh A, B, C. Khi đó nếu các đường thẳng Lob* $(AA_1),(BB_1),(CC_1)$ *đồng quy thì:*

$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})}\frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})}\frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})}=-1 \quad (*)$$

Ngược lại nếu có $(*)$ *thì các đường thẳng Lob* $(AA_1),(BB_1),(CC_1)$ *hoặc không có điểm chung hoặc đồng quy.*

Chứng minh.



- Nếu các đường thẳng Lob $(AA_1),(BB_1),(CC_1)$ đồng quy tại điểm D: Áp dụng **Định lý 1.2** cho tam giác Lobachevsky ABA_1 với các điểm thẳng hàng C,D,C_1 ta có:

$$\frac{sh(\overline{CB})}{sh(\overline{CA_1})}\frac{sh(\overline{DA_1})}{sh(\overline{DA})}\frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})}=1 \quad (1)$$

Áp dụng **Định lý 1.2** cho tam giác Lobachevsky ACA_1 với các điểm thẳng hàng B,B_1,D ta có:

$$\frac{sh(\overline{BA_1})}{sh(\overline{BC})}\frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})}\frac{sh(\overline{DA})}{sh(\overline{DA_1})}=1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})}\frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})}\frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})}=-1 \quad (*)$$

- Ngược lại, nếu có $(*)$: Trong các đường thẳng Lob $(AA_1),(BB_1),(CC_1)$ giả sử tồn tại một cặp đường có điểm chung, chẳng hạn (AA_1) và (BB_1) có điểm chung D.

Áp dụng **Định lý 1.2** cho tam giác Lobachevsky ACA_1 với các điểm thẳng hàng B,B_1,D ta có:

$$\frac{sh(\overline{BA_1})}{sh(\overline{BC})}\frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})}\frac{sh(\overline{DA})}{sh(\overline{DA_1})}=1$$

Kết hợp với $(*)$ thì có:

$$\frac{sh(\overline{CB})}{sh(\overline{CA_1})}\frac{sh(\overline{DA_1})}{sh(\overline{DA})}\frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})}=1$$

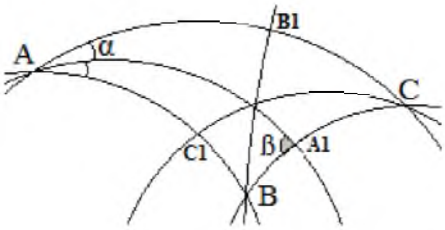
Áp dụng **Định lý 1.2** cho tam giác Lobachevsky ABA_1 suy ra các điểm C,D,C_1 thẳng hàng, nghĩa là các đường thẳng Lob $(AA_1),(BB_1),(CC_1)$ đồng quy tại D □

Tiếp theo chúng tôi nêu một hệ quả ứng dụng của **Định lý 2.1** đối với các đường phân giác trong tam giác Lobachevsky.

Hệ quả 2.2. *Cho tam giác Lobachevsky. Khi đó các đường thẳng Lob, là phân giác của các góc trong tam giác đó, luôn luôn đồng quy.*

Chứng minh. Xét tam giác Lobachevsky với các đỉnh *A, B, C.*

Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là các điểm nằm trên các cung đoạn BC, CA, AB và (AA_1), (BB_1), (CC_1) là những phân giác của các góc trong tam giác đã nêu.



Gọi β là số đo góc $\angle BA_1A$. Đường phân giác (AA_1) phân góc $\angle BAC$ thành hai góc có cùng số đo α.

Áp dụng **Định lý hàm số Sin hyperbolic** (Nguyễn Thị Liên & Nguyễn Bá Khiến, 2011) cho tam giác Lobachevsky ABA_1 ta có:

$$\frac{sh(A_1B)}{\sin\alpha} = \frac{sh(AB)}{\sin\beta}$$

Áp dụng Định lý hàm số Sin hyperbolic cho tam giác Lobachevsky ACA_1 ta có:

$$\frac{sh(A_1C)}{\sin\alpha} = \frac{sh(AC)}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{sh(AC)}{\sin\beta}$$

Từ các đẳng thức trên, suy ra:

$$\frac{sh(A_1B)}{sh(A_1C)} = \frac{sh(AB)}{sh(AC)}$$

Do A_1 nằm trên cung đoạn BC nên $\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})} < 0$, suy ra:

$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})} = -\frac{sh(AB)}{sh(AC)}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})} = -\frac{sh(BC)}{sh(BA)}$$

$$\frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})} = -\frac{sh(CA)}{sh(CB)}$$

Suy ra:

$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})}\frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})}\frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})} = -\frac{sh(AB)}{sh(AC)}\frac{sh(BC)}{sh(BA)}\frac{sh(CA)}{sh(CB)} = -1$$

Áp dụng **Định lý 2.1** thì có điều phải chứng minh □

3. Kết luận

Lấy cảm hứng từ Định lý Ceva của Hình học Euclide chúng tôi đã nêu và chứng minh **Định lý 2.1**, thể hiện một kết quả của Hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré. Kết quả đó có ý nghĩa hơn khi chúng tôi nêu được một áp dụng thông qua **Hệ quả 2.2**❑

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Lê Hào. (2018). *Độ dài đại số Lobachevsky trong hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré, một số áp dụng*. Tạp chí Khoa học Đại học Phú Yên, tr.01- tr.06.

Lê Hào. (2020). *Định lý về các điểm thẳng hàng trong hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré*. Tạp chí Khoa học Đại học Phú Yên, tr.11- tr.15.

Nguyễn Thị Liên. (2011). *Hình học trên nửa mặt phẳng Poincaré.* Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 12-38.

Nguyễn Bá Khiến. (2011). *Một số vấn đề của hình học Hyperbolic n chiều.* Luận văn Thạc sĩ – Đại học Vinh, 15-34.

Nguyễn Thị Xuyên. (2008). *Một số vấn đề về hình học phi Euclide.* Đại học An Giang, 35-44.

Phan Thị Ngọc. (2007). *Nửa phẳng Poincaré và hình học Hyperbolic.* Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 25-45.

Royster, C. (2002). *Non Euclidean geometry.* Course Spring, 34-90.

Parker, H. (1989). *Non Euclidean geometry.* Boston USA, 20-74.

Theorem on the concurrent lines in geometry with the Poincaré half-plane model, an application

Le Hao

Phu Yen University

Email: lehaodhpy@gmail.com

Received: August 25, 2020; Accepted: January 08, 2021

Abstract

In a previous paper, we presented the Theorem on the collinear conditions of Lobachevskian points in geometry with the Poincaré half-plane model. Applying such results from that paper, we obtained ***Theorem 2.1*** *on the concurrent conditions of Lobachevskian lines and presented an application of this Theorem.*

Keywords: *Poincaré half-plane model, Lobachevskian line segment, Lobachevskian line, Lobachevskian algebraic distance.*