THE SPEED OF CONVERGENCE OF THE THIRD – ODER NEWTON – KRYLOV METHOD

Lai Van Trung*, Quach Thi Mai Lien
TNU – University of Information and Communication Technology

ARTICLE INFO

Received: 03/12/2020
Revised: 01/5/2021
Published: 11/5/2021

KEYWORDS

Convergence speed
Convergence
Third-order Newton-Krylov method
Iterative formula
Nonlinear equations system

ABSTRACT

In recent years, the approximate solution of the system of nonlinear equations has been studied by many scientists, especially the class of systems of nonlinear equations with a large number of equations. The third-order Newton - Krylov method solved these systems very well with the speed of cubed of convergence. The convergence of iterated formula has been proofed, however, its only has been confirmed by experiment. In this article, we will present the speed of convergence of the third-order Newton - Krylov method and give the proof for the speed of convergence of iterated formula simultaneously. Moreover, the article also presents a consult of experiment to proof for the speed of convergence of the Newton–Krylov method.

TỐC ĐỘ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP NEWTON – KRYLOV BẬC BA

Lại Văn Trung*, Quách Thị Mai Liên
Trường Đại học Công nghệ thông tin & Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 03/12/2020
Ngày hoàn thiện: 01/5/2021
Ngày đăng: 11/5/2021

TỪ KHÓA

Tốc độ hội tụ
Sự hội tụ
Phương pháp Newton-Krylov bậc ba
Công thức lặp
Hệ phương trình phi tuyến

TÓM TẮT

Những năm gần đây, việc giải gần đúng hệ phương trình phi tuyến được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu, đặc biệt là lớp các hệ phương trình phi tuyến có số phương trình lớn. Phương pháp Newton –Krylov bậc ba giải quyết rất tốt lớp các hệ phương trình này với tốc độ hội tụ bậc ba. Sự hội tụ của công thức lặp đã được chứng minh, tuy nhiên về tốc độ hội tụ của nó chỉ được khẳng định qua thực nghiệm. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày về tốc độ hội tụ của phương pháp Newton – Krylov bậc ba, đồng thời đưa ra chứng minh cho tốc độ hội tụ của công thức lặp. Ngoài ra, bài báo còn trình bày một kết quả thực nghiệm để minh chứng cho tốc độ hội tụ của phương pháp.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.3815

* Corresponding author. *Email: lvtrungsp@gmail.com*

1. Giới thiệu

Xét hệ phương trình phi tuyến

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

trong đó $F = \left(f_1(x), f_2(x); \ldots; f_n(x)\right)^t$ với $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm phi tuyến ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Phương pháp Newton được công bố lần đầu tiên vào năm 1685, sau đó được nhiều nhà khoa học phát triển và cải tiến sang giải hệ phương trình phi tuyến với sự hội tụ bậc cao [1]-[3]. Trong [4] đã trình bày phương pháp New – Krylov bậc ba để giải quyết hệ phương trình (1) như sau:

Bước 1: Đặt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'\left(x_n - \frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}F(x_n)\right)}, \tag{2}$$

và biến đổi công thức (2) thành $F'\left(x_n - \frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}F(x_n)\right)(x_{n+1} - x_n) = -F(x_n)$ (3)

Bước 2: Đặt $k(x_n) = -\frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}F(x_n)$ và chuyển phương trình (3) thành

$$F'(x_n)k(x_n) = -\frac{1}{2}F(x_n) \tag{4}$$

Bước 3: Áp dụng phương pháp Krylov [5] để tìm nghiệm gần đúng $k(x_n)$ của phương trình (4) và viết công thức (3) viết lại như sau

$$F'(x_n + k(x_n))s_n = -F(x_n), \tag{5}$$

với

$$x_{n+1} = s_n + x_n. \tag{6}$$

Bước 4: Áp dụng thuật toán Newton-Krylov để tìm nghiệm x_{n+1} của hệ (5), (6).

Sự hội tụ của công thức lặp đã được trình bày trong [4], [5], tuy nhiên tốc độ hội tụ của công thức lặp chỉ được khẳng định qua thực nghiệm. Bài báo này trình bày về tốc độ hội tụ và đưa ra chứng minh cho tốc độ hội tụ của phương pháp.

Cấu trúc của bài báo gồm 4 phần: Sau phần giới thiệu là Phần 2, trình bày về tốc độ hội tụ và đưa ra việc chứng minh cho tốc độ hội tụ của công thức lặp; Phần 3 trình bày một số kết quả thực nghiệm; Cuối cùng là phần Kết luận.

2. Tốc độ hội tụ

Định nghĩa 2.1 (Tốc độ hội tụ) (Xem [6]) Xét dãy $e_n = x_n - a_n$, nếu tồn tại một hàm k-tuyến tính $K \in L\left(\overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}^{k}, \mathbb{R}^n\right)$ sao cho $e_{n+1} = Ke_n^k + O\left(\|e_n\|^{k+1}\right)$, với $e_n^k = \left(\overbrace{e, \ldots, e}^{k}\right)$ và $\|e_n\|$ là chuẩn Euclid thì x_n được gọi là hội tụ đến a với tốc độ hội tụ cấp k.

Định lý 2.2 (Sự hội tụ của phương pháp Newton-Krylov bậc ba) Cho ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ khả vi liên tục trên một tập lồi mở $D \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử tồn tại $x^* \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha, \beta > 0$ thỏa mãn

$S\left(x^*,r\right)\subset D$, $F'\left(x^*\right)^{-1}$ tồn tại, $\left\|F'\left(x^*\right)^{-1}\right\|\le\beta$ và $F'\in Lip_\gamma\left(S\left(x^*,r\right)\right)$. Khi đó tồn tại số $\varepsilon>0$ thỏa mãn với mỗi $x^0\in\overline{S}\left(x^*,\varepsilon\right)$ dãy $x_1,x_2,\ldots$ xác định bởi công thức (2) hội tụ đến x^*.

Định lý 2.3 (Tốc độ hội tụ của phương pháp Newton-Krylov bậc ba) Cho ánh xạ $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.2 và có đạo hàm đến cấp ba trên $D\subset\mathbb{R}^n$. Khi đó dãy x_n xác định bởi công thức (2) hội tụ đến x^* với tốc độ hội tụ cấp ba.

Sau đây, chúng tôi đưa ra chứng minh Định lý 2.3. Trong chứng minh này, ta đặt $e_n=x_n-x^*$ và $C_j=\dfrac{1}{j!}\dfrac{F^{(j)}\left(x^*\right)}{F'\left(x^*\right)}$, $j=1,2,3...$

Để chứng minh Định lý 2.3, ta sẽ chỉ ra có hàm K – tuyến tính sao cho

$$e_{n+1}=Ke_n^3+O\left\|e_n\right\|^4.$$

Trước hết ta viết lại công thức (2) như sau $x_{n+1}=x_n-F'\left(y_n\right)^{-1}F\left(x_n\right)$,

với
$$y_n=x_n-\frac{1}{2}F'\left(x_n\right)^{-1}F\left(x_n\right).$$

Áp dụng công thức khai triển Taylor của hàm $F\left(x\right)$ tại x^* ta có

$$F\left(x\right)=F\left(x^*\right)+F'\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)+\frac{1}{2!}F''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)^2+\frac{1}{3!}F'''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)^3+O\left\|x-x^*\right\|^4.$$

Khi đó
$$\begin{aligned}F\left(x_n\right)&=F'\left(x^*\right)\left(x_n-x^*\right)+\frac{1}{2!}F''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)^2+\frac{1}{3!}F'''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)^3+O\left\|x-x^*\right\|^4\\&=F'\left(x^*\right)e_n+\frac{1}{2!}F''\left(x^*\right)e_n^2+\frac{1}{3!}F'''\left(x^*\right)e_n^3+O\left\|e_n\right\|^4\\&=F'\left(x^*\right)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O\left\|e_n\right\|^4\right).\end{aligned}$$

Áp dụng công thức khai triển Taylor của hàm $F'\left(x\right)$ tại x^* ta có

$$F'\left(x\right)=F'\left(x^*\right)+F''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)+\frac{1}{2}F'''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)^2+O\left\|x-x^*\right\|^3.$$

Khi đó
$$\begin{aligned}F'\left(x_n\right)&=F'\left(x^*\right)+F''\left(x^*\right)\left(x_n-x^*\right)+\frac{1}{2}F'''\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)^2+O\left\|x-x^*\right\|^3\\&=F'\left(x^*\right)\left(I+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O\left\|e_n\right\|^3\right).\end{aligned}$$

Do đó
$$\begin{aligned}\frac{F\left(x_n\right)}{F'\left(x_n\right)}&=\frac{F'\left(x^*\right)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O\left\|e_n\right\|^4\right)}{F'\left(x^*\right)\left(I+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O\left\|e_n\right\|^3\right)}\\&=\left[I-2C_2e_n+\left(4C_2^2-3C_3\right)e_n^2+O\left\|e_n\right\|^3\right]\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O\left\|e_n\right\|^4\right)\\&=e_n-C_2e_n^2+\left(2C_2^2-2C_3\right)e_n^3+O\left\|e_n\right\|^4.\end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{F\left(x_n\right)}{2F'\left(x_n\right)}=\frac{1}{2}e_n-\frac{1}{2}C_2e_n^2+\left(C_2^2-C_3\right)e_n^3+O\left\|e_n\right\|^4.$$

Do đó $$y_n = x^* + \frac{1}{2}e_n + C_2 e_n^2 - \left(C_2^2 - C_3\right)e_n^3 + O\left\|e_n\right\|^4.$$

Ta có $$F'\left(y_n\right) = F'\left(x^*\right) + F''\left(x^*\right)\left(y_n - x^*\right) + \frac{1}{2}F'''\left(x^*\right)\left(y_n - x^*\right)^2 + O\left\|y_n - x^*\right\|^3$$
$$= F'\left(x^*\right)\left[I + 2C_2\left(y_n - x^*\right) + 3C_3\left(y_n - x^*\right)^2 + O\left\|e_n\right\|^3\right]$$
$$= F'\left(x^*\right)\left[I + 2C_2 e_n + \left(C_2^2 + \frac{3}{4}C_3\right)e_n^2 + O\left\|e_n\right\|^3\right].$$

Suy ra $$\frac{F\left(x_n\right)}{F'\left(y_n\right)} = \frac{e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O\left\|e_n\right\|^4}{I + C_2 e_n + \left[C_2^2 + \frac{3}{4}C_3\right)e_n^2 + O\left\|e_n\right\|^3}$$
$$= \left(I - C_2 e_n - \frac{3}{4}C_3 e_n^2 + O\left\|e_n\right\|^3\right)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O\left\|e_n\right\|^4\right)$$
$$= e_n - \left(C_2^2 - \frac{C_3}{4}\right)e_n^3 + O\left\|e_n\right\|^4.$$

Vậy $$x_{n+1} = x_n - F'\left(y_n\right)^{-1}F\left(x_n\right)$$
$$= x_n - e_n + \left(C_2^2 - \frac{C_3}{4}\right)e_n^3 + O\left\|e_n\right\|^4$$
$$= x^* + \left(C_2^2 - \frac{C_3}{4}\right)e_n^3 + O\left\|e_n\right\|^4.$$

Do đó $e_{n+1} = \left(C_2^2 - \frac{C_3}{4}\right)e_n^3 + O\left\|e_n\right\|^4$, vậy Định lý 2.3 được chứng minh.

3. Kết quả thực nghiệm

Trong phần này, chúng tôi đưa ra một số ví dụ và bằng cách sử dụng Matlab để tìm nghiệm gần đúng của hệ thông qua công thức lặp (3). Trong các ví dụ này, các bước lặp sẽ dừng lại khi $\left\|F\left(x_n\right)\right\| < 10^{-13}$ và chúng tôi cũng đưa ra thời gian chạy của thuật toán.

Ví dụ 1 : Giải gần đúng hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \end{cases} \tag{7}$$

Ta chọn nghiệm gần đúng ban đầu là $x^0 = \left(1, -1, 0.1\right)^T$, sau khi thực hiện 4 bước lặp với thời gian chạy 0.125 (s) ta được nghiệm gần đúng của hệ (7) là

$$x = \left(2.14025812200518, -2.09029464225523, -0.22352512107130\right)^T.$$

Mã code :

```
Clear all
Syms x1 x2 x3
Format long ;
```

```
f = [x1*x2*x3 ; x1+x2-x3*x3; x1*x1+x2*x2+x3*x3];
y = [x1; x2 ;x3]; xn = [1; -1, 0.1];
R = Jacobian(f,y) ;
m = 0 ; tic ;
While (m<100)
a = subs(R, {x1, x2, x3}, {xn(1), xn(2), xn(3)} ;
A = a'*a ; B = a'*b ;
Tol = 1e^-13 ; z0 = zeros(2 ;1);
kn = fom(A, B, z0, tol) ;
% (Tính nghiệm gần đúng k(xn) của hệ F'  xn  k  xn  = -1/2 F  xn  )
yn = xn + kn;
a = subs(R, {x1, x2; x3}, {yn(1), yn(2), yn(3)});
b = -subs(f, {x1, x2, x3}, {xn(1), xn(2), xn(3)});
A = a'*a ; B = a'*b ;
Tol = 1e^-13 ; z0 = zeros(2 ;1);
kn = fom(A, B, z0, tol) ;
% (Tính nghiệm gần đúng sn của hệ F'  xn + k  xn   sn = -F  xn  )
xn = xn + sn;
If norm(B)< 1e^-13  breack;
else
m = m+1;
end;
end; toc;
fprintf('Thời gian thực hiện:'); disp(toc);
If (m=100)
fprintf('Không hội tụ sau 100 lần lặp');
else
fprintf('Số lần lặp là'); m
fprintf('Nghiệm là'); xn
end.
```

Ví dụ 2: Giải gần đúng hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1x_3 + x_4x_1 + x_4x_3 = 0 \\ x_2x_3 + x_4x_2 + x_4x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_4x_1 - x_4x_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Bằng cách chọn nghiệm gần đúng ban đầu $x^0 = \ 0.5,\ 0.5,\ 0.5, -0.3\ ^T$, sau khi thực hiện ba bước lặp với thời gian chạy 0.156 (s) ta được nghiệm gần đúng của hệ phương trình (8) là

$$0.577350269189626, 0.577350269189626, 0.577350269189626, -0.288675134594813\ .$$

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày về tốc độ hội tụ của phương pháp Newton – Krylov bậc ba để giải hệ phương trình phi tuyến. Đây là kết quả quan trọng để nhóm tác giả tiếp tục xây dựng các công thức lặp cải tiến của phương pháp Newton – Krylov.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] M. T. Darvishi, “A two-step high-order Newton-like method to solve systems of nonlinear equations,” *International J. of Pure and Applied Mathematics*, vol. 57, no. (4), pp. 543-555, 2009.

[2] M. Frontini and E. Sormani, “Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations,” *Appl. Math. Comput*, vol. 149, pp. 771-782, 2004.

[3] M. T. Darvishi and A. Barati, “A fourth-order method from quadrature formulae to solve systems of nonlinearequations,” *Appl. Math. Comput*, vol. 188, pp. 257-261, 2007.

[4] V. T. Lai, P. K. Hoang, M. L. Quach, and V. H. Nguyen, “Solving system of nonlinear equations by the third – oder Newton-Krylov method,” *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 225, no. 06, pp. 405-410, 2020.

[5] M. T. Darvishi, and B. –C. Shin, “High –Order Newton – Krylov Methods to Solve systems of Nonlinear Equation,” *J.KIAM*, vol. 15, no.1, pp. 19 -30, 2011.

[6] J. E. Dennis, and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinears*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983.