TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 3 (2021): 508-520

Vol. 18, No. 3 (2021): 508-520

ISSN:
1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TRONG GIẢNG DẠY MỘT SỐ MÔ HÌNH KINH TẾ CHO SINH VIÊN KHỐI NGÀNH KINH TẾ TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Quang Huy

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Nguyễn Quang Huy – Email: huynq@hcmute.edu.vn

Ngày nhận bài: 05-8-2020; ngày nhận bài sửa: 11-12-2020; ngày duyệt đăng: 16-3-2021

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi tổng hợp, phân tích và đánh giá các mô hình Toán Kinh tế áp dụng phương trình sai phân tuyến tính cấp một và phương trình sai phân tuyến tính cấp hai. Hơn nữa, chúng tôi mở rộng một số mô hình kinh điển như mô hình kinh tế vĩ mô, mô hình cân bằng thị trường. Ngoài ra, chúng tôi còn đánh giá tính ổn định của các phương trình. Đây là một việc rất cần thiết. Bên cạnh đó, bài báo này, có thể được sử dụng như một tài liệu tham khảo hữu ích cho giảng viên dạy các môn Toán Kinh tế và sinh viên khối ngành Kinh tế tại Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh và các trường đại học khác.

Từ khóa: phương trình sai phân tuyến tính cấp một; mô hình Toán Kinh tế; phương trình sai phân tuyến tính cấp hai

1. Giới thiệu

Toán học đã và đang được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như vật lí, kĩ thuật, y học, sinh học, tự động hóa, công nghệ truyền thông, các mô hình kinh tế… Toán học là một công cụ hỗ trợ đắc lực cho việc phân tích và giải quyết các bài toán một cách logic. Khi mô hình kinh tế được thiết lập dưới dạng các mô hình toán học cụ thể thì việc vận dụng toán học để phân tích các mô hình kinh tế cũng như kiểm nghiệm các kết quả đạt được luôn là vấn đề cấp thiết đối với các chuyên gia kinh tế cũng như giảng viên, sinh viên.

Hiện nay, các môn học trang bị các kiến thức toán học và áp dụng các kiến thức đó vào việc phân tích các mô hình kinh tế được đưa vào giảng dạy trong nhiều trường đại học trong và ngoài nước. Tại Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh, sinh viên khối ngành Kinh tế được học hai học phần Toán Kinh tế 1 và Toán Kinh tế 2 với tổng số tín chỉ là 6. Trong đó, phương trình sai phân được giảng dạy trong môn Toán Kinh tế 2 ở học kì 2 năm nhất. Việc áp dụng lí thuyết phương trình sai phân vào các mô hình kinh tế là rất quan trọng đối với sinh viên khối ngành kinh tế. Trong bài báo này, chúng tôi tổng hợp

Cite this article as: Nguyen Quang Huy (2021). Applications of difference equation in teaching Economic models for economic students at Ho Chi Minh City University of Technology and Education. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(3), 508-520.

và phân tích có hệ thống các mô hình kinh tế áp dụng phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 và cấp 2 như: mô hình kinh tế vĩ mô (Sampson, 2005), mô hình Cob – Web áp dụng phương trình sai phân cấp 1 (Sampson, 2005), mô hình thị trường có hàng hóa tồn đọng (Chiang), mô hình Harrod – Domar (Le, 2010), mô hình thu nhập quốc dân với nhân tử tăng tốc Samuelson (Sampson, 2005), các mô hình ổn định Phillips (Ferguson, & Lim, 2003), mô hình Cob – Web áp dụng phương trình sai phân cấp 2 (Le, 2010), mô hình Cob – Web với sự thay đổi số công ti trong thị trường(Ferguson, & Lim, 2003), mô hình kinh tế vĩ mô về lạm phát và thất nghiệp (Chiang)… Khi thực hiện nghiên cứu này, chúng tôi cũng đã làm rõ các công thức nghiệm và đánh giá tính ổn định của các phương trình sai phân. Hơn nữa, chúng tôi khảo sát thêm một số trường hợp của mô hình kinh tế vĩ mô và mô hình cân bằng thị trường với kì vọng giá. Và chúng tôi mong muốn sinh viên nắm vững một cách sâu rộng lí thuyết phương trình sai phân và các ứng dụng trong các mô hình kinh tế. Qua đó, sinh viên có thể học tốt môn Toán Kinh tế 2 cũng như các môn chuyên ngành. Điều này, giúp bài báo trở nên thiết thựcđối với giảng viên và sinh viên của Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật cũng như các trường đại học khác.

2. **Cơ sở lí thuyết** (Sampson, 2005)

2.1. Phương trình sai phân tuyến tính cấp một

Định nghĩa 2.1. Một phương trình sai phân tuyến tính cấp một được định nghĩa bởi một phương trình chuyển động:

$$Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1}$$

trong đó giá trị ban đầu Y_0 cho trước.

Định nghĩa 2.2. Giá trị cân bằng của một phương trình sai phân tuyến tính cấp một cho bởi

$$Y^* = \frac{\alpha}{1-\phi}.$$

Định lí 2.3. Nghiệm của một phương trình sai phân tuyến tính cấp một có dạng là

$$Y_t = Y^* + \phi^t (Y_0 - Y^*) \text{ nếu } \phi \neq 1$$

và $\quad Y_t = \alpha t + Y_0$ nếu $\phi = 1$.

Định lí 2.4. Phương trình sai phân cấp một $Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1}$ ổn định khi và chỉ khi $-1 < \phi < 1$.

2.2. Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2

Định nghĩa 2.5. Một phương trình sai phân tuyến tính cấp hai có một phương trình chuyển động cho bởi:

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2}$$

trong đó các giá trị ban đầu Y_0 và Y_1 cho trước.

Định lí 2.6. Giá trị cân bằng của một phương trình sai phân tuyến tính cấp hai cho bởi

$$Y^* = \frac{\alpha}{1-\phi_1-\phi_2}.$$

Định nghĩa 2.7. Đa thức đặc trưng của phương trình sai phân

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2}$$

là: $r^2 - \phi_1 r - \phi_2$

Định lí 2.8. Gọi r_1 và r_2 là các nghiệm của đa thức đặc trưng.

Nếu $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$ thì nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai có dạng là

$$Y_t = Y^* + A_1 r_1^t + A_2 r_2^t$$

trong đó A_1, A_2 là các hằng số.

Nếu $\phi_1 + \phi_2 = 1$ và $\phi_1 \neq 2$ thì $Y_t = A_1 + A_2(\phi_1 - 1)^t + \dfrac{\alpha}{2-\phi_1}t.$

Nếu $\phi_1 + \phi_2 = 1$ và $\phi_1 = 2$ thì $Y_t = A_1 + A_2 t + \dfrac{\alpha t^2}{2}.$

Định lí 2.9. Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai $Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2}$ ổn định khi và chỉ khi $|r_1| < 1$ và $|r_2| < 1$.

3. Một số mô hình kinh tế

3.1. Một số mô hình ứng dụng phương trình sai phân cấp 1

3.1.1. Một số ví dụ trong kinh tế vĩ mô

a) Lượng tiêu thụ có tính trễ (Sampson, 2005)

Giả sử rằng Y_t là tổng thu nhập của một nền kinh tế (GNP), C_t là lượng tiêu thụ của dân cư, I_t là lượng đầu tư và G_t là chi tiêu của chính phủ thỏa mãn:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

Cả đầu tư và chi tiêu của chính phủ đều là hằng số sao cho

$$I_t = I_0,$$
$$G_t = G_0$$

trong đó I_0, G_0 là các hằng số. Lượng tiêu thụ phụ thuộc vào mức thu nhập có tính trễ một giai đoạn thông qua hàm tiêu thụ

$$C_t = C_0 + cY_{t-1},\ 0 < c < 1$$

trong đó c là xu hướng tiêu dùng biên tế. Điều này dẫn đến

$$Y_t = (C_0 + I_0 + G_0) + cY_{t-1}. \quad (3.1)$$

chính là một phương trình sai phân tuyến tính cấp một.

Giá trị cân bằng của GNP là

$$Y^* = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}.$$

Nền kinh tế ổn định vì $0 < \phi = c < 1$. Nghiệm của phương trình (3.1) là

$$Y_t = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c} + c^t\left(Y_0 - \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}\right) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}.$$

Sau đây chúng tôi khảo sát trường hợp mức thu nhập có tính trễ và trường hợp lượng tiêu thụ và mức thu nhập có tính trễ.

b) Mức thu nhập có tính trễ

Giả sử rằng D_t là tổng cầu của một nền kinh tế (GNP), Y_t là tổng sản phẩm quốc dân, C_t là lượng tiêu thụ của dân cư, I_t là lượng đầu tư và G_t là chi tiêu của chính phủ thỏa mãn

$D_t = C_t + I_t + G_t,$

$I_t = I_0,$

$G_t = G_0,$

$C_t = C_0 + cY_{t-1}$, $0 < c < 1,$

$Y_t - Y_{t-1} = \beta(D_t - Y_{t-1}), 0 < \beta < 1.$

Ta có

$$\boldsymbol{Y_t = \left(\frac{\beta}{1-\beta c}\right)(I_0 + G_0 + C_0) + \left(\frac{1-\beta}{1-\beta c}\right)Y_{t-1}.} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Mức thu nhập cân bằng là

$$Y^* = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}.$$

Nền kinh tế ổn định vì $0 < \phi = \dfrac{1-\beta}{1-\beta c} < 1$. Nghiệm của phương trình (3.2) là

$$Y_t = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c} + \left(\frac{1-\beta}{1-\beta c}\right)^t\left(Y_0 - \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}\right) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}.$$

c) Lượng tiêu thụ và mức thu nhập có tính trễ

$D_t = C_t + I_t + G_t,$

$C_t = C_0 + cY_{t-1}, 0 < c < 1,$

$Y_t - Y_{t-1} = \beta(D_t - Y_{t-1}), 0 < \beta < 1.$

Ta có

$$\boldsymbol{Y_t = \beta(C_0 + I_0 + G_0) + \big(1 - \beta(1-c)\big)Y_{t-1}.} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Mức thu nhập cân bằng là

$$Y^* = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}.$$

Nền kinh tế ổn định vì $0 < \phi = 1 - \beta(1-c) < 1$. Nghiệm của phương trình (3.3) là

$$Y_t = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c} + \left(1-\beta(1-c)\right)^t \left(Y_0 - \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}\right) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}.$$

d) Mô hình ổn định Phillips đơn giản (Ferguson , Lim, 2003)

Ta xét mô hình sau

$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$
$$C_t = C_0 + cY_{t-1}, 0 < c < 1,$$
$$I_t = I_0,$$
$$G_t = G_0 + G_t^p,$$
$$G_t^p = \lambda(Y^F - Y_{t-1}),\ \lambda > 0$$

trong đó, G_t^p là thành phần chính sách tài khóa của chi tiêu chính phủ, Y^F là thu nhập đầy đủ và λ là hệ số điều chỉnh tốc độ.

Ta có

$$Y_t = (C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F) + (c - \lambda)Y_{t-1}. \tag{3.4}$$

Mức thu nhập cân bằng là

$$Y^* = \frac{C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F}{1-c+\lambda}.$$

Nghiệm của phương trình là

$$Y_t = \frac{C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F}{1-c+\lambda} + \left(c-\lambda\right)^t \left(Y_0 - \frac{C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F}{1-c+\lambda}\right).$$

Tính ổn định đòi hỏi $\lambda < c+1$. Khi đó

$$Y_t \xrightarrow{t\to\infty} \frac{C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F}{1-c+\lambda}.$$

3.1.2. Mô hình Cob – Web (Sampson, 2005)

Giả sử rằng lượng cung Q_t^s phụ thuộc vào giá của sản phẩm tại một giai đoạn trước chứ không phải là giá hiện tại. Giả sử rằng lượng cầu Q_t^d phụ thuộc vào giá sản phẩm hiện tại. Khi đó ta có

$$Q_t^d = a - bP_t,$$
$$Q_t^s = c + dP_{t-1},\ (b, d > 0,\ c < a)$$

trong đó, Q_t^d là lượng cầu, Q_t^s là lượng cung và P_t là giá tại thời điểm *t*.

Thị trường cân bằng khi và chỉ khi

$$Q_t^d = Q_t^s.$$

Ta được

$$P_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} P_{t-1}. \tag{3.5}$$

Giá cân bằng là

$$P^* = \frac{a-c}{b+d}$$

và giá tại thời điểm t là

$$P_t = P^* + \left(-\frac{d}{b}\right)^t (P_0 - P^*).$$

Tính ổn định đòi hỏi rằng $d < b$ hay hệ số góc của đường cong cung sẽ nhỏ hơn hệ số góc của đường cong cầu. Khi đó

$$P_t \xrightarrow{t\to\infty} \frac{a-c}{b+d}.$$

Sau đây, chúng tôi khảo sát mô hình tổng quát hơn là mô hình cân bằng thị trường với kì vọng giá.

3.1.3. Mô hình cân bằng thị trường với kì vọng giá

Ta xét mô hình thị trường biểu diễn bởi hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} Q_t^d = Q_t^s, \\ Q_t^d = a - bP_t, \quad (b, d > 0,\ c < a,\ 0 < \eta \le 1) \\ Q_t^s = c + dP_{t-1}, \\ \overline{P}_t = \overline{P}_{t-1} + \eta(P_{t-1} - \overline{P}_{t-1}) \end{cases}$$

trong đó, $\overline{P}_t$ là kì vọng giá tại thời điểm t.

Ta giải được

$$\overline{P}_t = \frac{\eta}{b}(a-c) - \frac{b(\eta-1)+d\eta}{b}\overline{P}_{t-1}. \tag{3.6}$$

Nghiệm của phương trình (3.6) là

$$\overline{P}_t = \frac{a-c}{b+d} + \left(-\frac{b(\eta-1)+d\eta}{b}\right)^t \left(P_0 - \frac{a-c}{b+d}\right).$$

Điều này dẫn đến

$$P_t = \frac{a-c}{b+d} - \frac{d}{b}\left(-\frac{b(\eta-1)+d\eta}{b}\right)^t \left(P_0 - \frac{a-c}{b+d}\right).$$

Tính ổn định của phương trình (3.6) đòi hỏi

$$-1 < -\frac{b(\eta-1)+d\eta}{b} < 1 \Leftrightarrow \eta < \frac{2b}{b+d}.$$

Khi đó

$$P_t \xrightarrow{t\to\infty} \frac{a-c}{b+d}.$$

Nhận xét: Khi $\eta = 1$ thì mô hình trên trở thành mô hình Cob – Web. Vậy mô hình Cob – Web là một trường hợp riêng của mô hình trên.

3.1.4. Mô hình thị trường có hàng hóa tồn đọng (Chiang)

Xét mô hình sau đây:

$$Q_t^d = a - bP_t,$$

$$Q_t^s = c + dP_t,$$

$$(b, d > 0, c < a).$$

Lượng điều chỉnh giá từ thời kì này sang thời kì khác tỉ lệ với lượng dư cầu

$$P_{t+1} - P_t = k(Q_t^d - Q_t^s) \quad (k > 0).$$

Ta giải được

$$P_{t+1} = k(a-c) + (1 - k(b+d))P_t. \tag{3.7}$$

Điều này dẫn đến

$$P_t = k(a-c) + [1 - k(b+d)]P_{t-1}.$$

Nghiệm của phương trình (3.7) là

$$P_t = \frac{a-c}{b+d} + [1-k(b+d)]^t\left(P_0 - \frac{a-c}{b+d}\right).$$

Phương trình (3.7) ổn định khi và chỉ khi

$$-1 < 1 - k(b+d) < 1 \Leftrightarrow k < \frac{2}{b+d}.$$

3.1.5. Mô hình Harrod– Domar (Le, 2010)

Mô hình Harrod – Domar được dùng để giải thích sự tăng trưởng của nền kinh tế. Gọi Y_t là thu nhập, S_t là tiết kiệm tỉ lệ với thu nhập tại cùng thời điểm.

$$S_t = sY_t \ \ (0 < s < 1).$$

Lượng đầu tư I_t là

$$I_t = k(Y_t - Y_{t-1}),\ k > 0, k \neq s.$$

Đầu tư I_t bằng tiết kiệm S_t tại cùng thời điểm

$$I_t = S_t.$$

Ta giải được

$$Y_t - \frac{k}{k-s}Y_{t-1} = 0. \tag{3.8}$$

Từ đó ta có nghiệm của phương trình (3.8) là

$$Y_t = \left(\frac{k}{k-s}\right)^t Y_0.$$

Phương trình (3.8) ổn định khi và chỉ khi

$$-1 < \frac{k}{k-s} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{s}{2}.$$

3.1.6. Bài toán trả góp (internet, "Difference equations and applications in economic dynamics")

Một người muốn mua một loại hàng hóa theo hình thức trả góp. Gọi giá trị của loại hàng hóa là *V* và *P* là khoản trả trước. Khoản nợ ban đầu là $D_0 = V - P.$ Theo hợp đồng vay nợ, khoản nợ gốc D_0 được trả trong *T* giai đoạn với lãi suất của từng giai đoạn là *r*. Ta cần tính số tiền trả góp mỗi giai đoạn.

Ta kí hiệu giá trị của khoản trả góp mỗi giai đoạn là *B*. Khoản nợ còn lại cuối giai đoạn thứ *t* là

$$D_t = (1+r)D_{t-1} - B$$

Ta giải được

$$D_t = \left(D_0 - \frac{B}{r}\right)(1+r)^t + \frac{B}{r} \qquad (3.9)$$

Ta có khoản nợ cuối giai đoạn thứ *T* là $D_T = 0.$ Phương trình (3.9) dẫn đến

$$\left(D_0 - \frac{B}{r}\right)(1+r)^T + \frac{B}{r} = 0$$

hay

$$B = \frac{rD_0}{1-(1+r)^{-T}}.$$

3.2. Một số mô hình ứng dụng phương trình sai phân cấp 2

3.2.1. Mô hình thu nhập quốc dân với nhân tử tăng tốc Samuelson (Sampson, 2005)

Giả sử rằng Y_t là tổng sản phẩm quốc dân của một nền kinh tế (GNP), C_t là tiêu thụ, I_t là đầu tư và G_t là chi tiêu của chính phủ thỏa mãn

$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

Bây giờ ta cho đầu tư thỏa mãn lí thuyết tăng tốc đầu tư sao cho

$$I_t = I_0 + \gamma\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right), \gamma > 0.$$

Ta giữ chi tiêu của chính phủ $G_t = G_0$ trong đó I_0 và G_0 là các hằng số.

Lượng tiêu thụ phụ thuộc vào mức thu nhập có tính trễ một giai đoạn thông qua hàm tiêu thụ

$$C_t = C_0 + cY_{t-1},\ 0 < c < 1$$

trong đó c là xu hướng tiêu dùng biên tế. Điều này dẫn đến

$$Y_t = (C_0 + I_0 + G_0) + (c+\gamma)Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} \qquad (3.10)$$

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2}.$$

Phương trình trên chính là một phương trình sai phân tuyến tính cấp hai.

Giá trị cân bằng của GNP là

$$Y^* = \frac{\alpha}{1-\phi_1-\phi_2} = \frac{C_0+I_0+G_0}{1-c}.$$

Phương trình đặc trưng là

$$r^2-(c+\gamma)r+\gamma=0.$$

Tính ổn định của phương trình (3.10) đòi hỏi rằng các nghiệm

$$r_1, r_2 = \frac{(c+\gamma)\pm\sqrt{(c+\gamma)^2-4\gamma}}{2}$$

đều có giá trị tuyệt đối bé hơn 1. Điều này xảy ra khi $\gamma<1$. Khi đó

$$Y_t \xrightarrow{t\to\infty} \frac{C_0+I_0+G_0}{1-c}.$$

3.2.2. Mô hình Cob – Web (Le, 2010).

Ta xét mô hình tổng quát hơn mô hình Cob – Web trong phương trình sai phân cấp 1 ở mục 3.1.2 như dưới đây

$$Q_t^d = a-bP_t,$$
$$Q_t^s = c+d[P_{t-1}-k(P_{t-1}-P_{t-2})],$$
$$(b,d>0,\ c<a, -1\le k\le 1)$$

trong đó Q_t^d là lượng cầu, Q_t^s là lượng cung và P_t là giá tại thời điểm *t*.

Ta tìm được phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 như sau:

$$P_t = \frac{a-c}{b}+\frac{d(k-1)}{b}P_{t-1}-\frac{dk}{b}P_{t-2}. \tag{3.11}$$

Giá cân bằng

$$P^* = \frac{a-c}{b+d}.$$

Phương trình đặc trưng là

$$r^2-\frac{d(k-1)}{b}r+\frac{dk}{b}=0.$$

Phương trình ổn định khi và chỉ khi phương trình đặc trưng có hai nghiệm r_1, r_2 thỏa mãn $|r_1|<1$ và $|r_2|<1$.

Để xét tính ổn định của phương trình (3.11), ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $-1\le k<0$

Phương trình (3.11) ổn định khi và chỉ khi $b+d(2k-1)>0$.

Trường hợp 2: $0<k\le 1$

$$a)\,\Delta = \left[\frac{d(k-1)}{b}\right]^2 - \frac{4dk}{b} > 0 \Leftrightarrow d(k^2+1) > 2k(d+2b).$$

Phương trình (3.11) ổn định khi và chỉ khi $b + d(2k-1) > 0$ và $\frac{dk}{b} < 1.$

b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow d(k^2+1) = 2k(d+2b).$

Phương trình (3.11) ổn định khi và chỉ khi $d(1-k) < 2b.$

c) $\Delta < 0 \Leftrightarrow d(k^2+1) < 2k(d+2b).$

Phương trình (3.11) ổn định khi và chỉ khi $\frac{dk}{b} < 1.$

Nhận xét: Khi $k = 0$ thì mô hình trên trở thành mô hình Cob – Web trong phương trình sai phân cấp 1.

3.2.3. Mô hình Cob – Web với sự thay đổi số công ti trong thị trường (Ferguson, & Lim, 2003)

Ta xét mô hình sau đây

$$Q_t^d = b_0 - b_1P_t + b_2Y_t,$$
$$Q_t^s = a_0 + a_1P_{t-1} + a_2N_t,$$
$$Q_t^d = Q_t^s,$$
$$N_t - N_{t-1} = k(P_{t-1} - P^c),$$
$$(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, k > 0, a_1 < b_1)$$

trong đó, Q_t^d là lượng cầu, Q_t^s là lượng cung, P_t là giá tại thời điểm *t*, Y_t là thu nhập của người tiêu dùng, N_t là số công ti trong thị trường và P^c là giá trị tới hạn.

Ta giải được

$$N_t = \frac{b_0 - a_0}{a_2} - \frac{b_1}{a_2}P_t - \frac{a_1}{a_2}P_{t-1} + \frac{b_2}{a_2}Y_t.$$

Từ đó ta có

$$P_t - \frac{b_1 - a_1 - ka_2}{b_1}P_{t-1} - \frac{a_1}{b_1}P_{t-2} = \frac{b_2}{b_1}Y_t - \frac{b_2}{b_1}Y_{t-1} + \frac{ka_2}{b_1}P^c.$$

Ta giả sử thu nhập Y_t là hằng số, nghĩa là $Y_t = Y_{t-1} = Y_0$ .Khi đó ta có

$$P_t = \frac{ka_2}{b_1}P^c + \frac{b_1 - a_1 - ka_2}{b_1}P_{t-1} + \frac{a_1}{b_1}P_{t-2}. \qquad (3.12)$$

Trên đây là phương trình sai phân tuyến tính cấp 2.

Giá cân bằng là

$$P^* = P^c.$$

Phương trình đặc trưng là

$$r^2 - \left(\frac{b_1 - a_1 - ka_2}{b_1}\right) r - \frac{a_1}{b_1} = 0.$$

Tính ổn định của phương trình (3.12) đòi hỏi $k < \dfrac{2(b_1 - a_1)}{a_2}.$

Khi đó

$$P_t \xrightarrow{t \to \infty} P^c.$$

3.2.4. Mô hình chính sách ổn định Phillips (Ferguson, & Lim, 2003)

Ta mở rộng mô hình ổn định Phillips đã xét trong mục 3.1.1 d) như dưới đây

$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$
$$C_t = C_0 + cY_{t-1}, 0 < c < 1,$$
$$I_t = I_0,$$
$$G_t = G_0 + G_t^p + G_t^d,$$
$$G_t^p = \lambda(Y^F - Y_{t-1}),\ \lambda > 0,$$
$$G_t^p = -k(Y_{t-1} - Y_{t-2}),\ k > 0.$$

Ta giải được

$$Y_t = \left(C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F\right) + (c - \lambda - k)Y_{t-1} + kY_{t-2}. \qquad (3.13)$$

Thu nhập cân bằng là

$$Y^* = \frac{C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F}{1 - c + \lambda}.$$

Phương trình đặc trưng là

$$r^2 - (c - \lambda - k)r - k = 0.$$

Tính ổn định của phương trình (3.13) đòi hỏi $\lambda + 2k < 1.$

Khi đó

$$Y_t \xrightarrow{t \to \infty} \frac{C_0 + I_0 + G_0 + \lambda Y^F}{1 - c + \lambda}.$$

3.2.5. Mô hình kinh tế vĩ mô về lạm phát và thất nghiệp (Chiang)

Ta xét mô hình sau đây

$$\begin{cases} p = a - T - bU + c\pi \ \ (a, b > 0,\ 0 < c \le 1), \\ \pi_{t+1} - \pi_t = d(p_t - \pi_t)\ (0 < d \le 1), \\ U_{t+1} - U_t = -k(m - p_{t+1})\ (k > 0) \end{cases}$$

trong đó, p là tốc độ lạm phát thực sự, *T* là hiệu suất lao động, π là tốc độ lạm phát kì vọng, *U* là tỉ lệ thất nghiệp và *m* là tỉ lệ tăng trưởng của đồng tiền danh nghĩa.

Ta giải được

$$p_{t+2}-\frac{1+cd+(1-d)(1+kb)}{1+kb}p_{t+1}+\frac{1-d(1-c)}{1+kb}p_t=\frac{dbkm}{1+kb}$$

hay

$$p_t=\frac{dbkm}{1+kb}+\frac{1+cd+(1-d)(1+kb)}{1+kb}p_{t-1}-\frac{1-d(1-c)}{1+kb}p_{t-2}. \quad (3.14)$$

Tốc độ lạm phát thực sự cân bằng là

$$p^*=m.$$

Phương trình đặc trưng là

$$r^2-\frac{1+cd+(1-d)(1+kb)}{1+kb}r+\frac{1-d(1-c)}{1+kb}=0.$$

Tính ổn định của phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 đòi hỏi phương trình đặc trưng có hai nghiệm r_1, r_2 thỏa mãn $|r_1|<1, |r_2|<1.$

Điều trên luôn thỏa mãn. Vậy phương trình (3.14) luôn ổn định.

Tiếp theo, ta giải được

$$U_{t+2}-\frac{1+cd+(1-d)(1+kb)}{1+kb}U_{t+1}+\frac{1-d(1-c)}{1+kb}U_t=\frac{kd[a-T-(1-c)m]}{1+kb},$$

hay

$$U_t=\frac{kd[a-T-(1-c)m]}{1+kb}+\frac{1+cd+(1-d)(1+kb)}{1+kb}U_{t-1}-\frac{1-d(1-c)}{1+kb}U_{t-2}. \quad (3.15)$$

Giả sử $a>T+(1-c)m$, ta có tỉ lệ thất nghiệp cân bằng là

$$U^*=\frac{a-T-(1-c)m}{b}.$$

Phương trình đặc trưng là

$$r^2-\frac{1+cd+(1-d)(1+kb)}{1+kb}r+\frac{1-d(1-c)}{1+kb}=0.$$

Theo phần trước, phương trình đặc trưng luôn có hai nghiệm r_1, r_2 thỏa mãn $|r_1|<1|$ và $r_2|<1.$ Vậy phương trình (3.15) luôn ổn định.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát nghiệm và đánh giá tính ổn định của nhiều mô hình ứng dụng phương trình sai phân cấp một và cấp hai trong kinh tế. Ngoài ra, chúng tôi mở rộng thêm mô hình kinh tế vĩ mô và mô hình cân bằng thị trường. Bài báo nghiên cứu này giúp cho giảng viên và sinh viên hiểu sâu rộng hơn các mô hình ứng dụng phương trình sai phân trong kinh tế cũng như có thể vận dụng chúng vào các bài toán trong thực tiễn. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ khảo sát thêm các mô hình ứng dụng hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp một trong kinh tế.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alpha C. Chiang (2004). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Third edition, McGraw - Hill, Inc.

Brian Ferguson and Guay Lim (2003). *Discrete time dynamic economic models*. Routledge.

Le, D. T. (2010). *Toan cao cap cho cac nha kinh te, Phan II: Giai tich toan hoc* [*Advanced mathematics for economists, Part 2: Mathematical Analysis*]. Hanoi: National Economics University Publishing House.

Michael Sampson (2001). *An introduction to mathematical economics part 2*. Loglinear Publishing.

APPLICATIONS OF DIFFERENCE EQUATION IN TEACHING ECONOMIC MODELS FOR ECONOMIC STUDENTS AT HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION

Nguyen Quang Huy

Ho Chi Minh City University of Technology and Education, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Quang Huy – Email: huynq@hcmute.edu.vn

Received: August 05, 2020; Revised: December 11, 2020; Accepted: March 16, 2021

ABSTRACT

In this article, we synthesize, analyse, and evaluate several mathematical economics models which apply first order and second order difference equations. Moreover, we also expand some classical modes such as macroeconomic model and equilibrium market model. In addition, we evaluate the stability of those equations, which is necessary. This article can be used as a useful reference material for lecturers who teach mathematical economics and economics to students at Ho Chi Minh City University of Technology and Education and other universities.

Keywords: first order difference equations; mathematical economics model; second order difference equation