TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 8 (2021): 1538-1552

Vol. 18, No. 8 (2021): 1538-1552

ISSN: 2734-9918

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

KIẾN THỨC CỦA HỌC SINH TIỂU HỌC VỀ NGHĨA TOÁN TỬ CỦA PHÂN SỐ

***Lê Thị Hoài Châu*[1*], *Phạm Thành Đạt*[2]**

[1] Trường Đại học Văn Hiến, Việt Nam

[2] Trường THPT Việt Âu, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

[*] Tác giả liên hệ: Lê Thị Hoài Châu – Email: chaulth@vhu.edu.vn

Ngày nhận bài: 28-11-2019; ngày nhận bài sửa: 23-03-2020; ngày duyệt đăng: 08-4-2021

TÓM TẮT

Tính đa nghĩa của khái niệm phân số là nguồn gốc của những khó khăn mà học sinh tiểu học gặp phải trong việc hiểu và sử dụng khái niệm này. Trong các nghĩa đó, nghĩa toán tử liên quan đến vai trò công cụ của phép nhân các phân số. Nghiên cứu tri thức luận cho phép thiết lập một lưới các tổ chức toán học tham chiếu cần xây dựng trong dạy học để giúp học sinh hiểu sự cần thiết của phép nhân các phân số. Với lưới tổ chức toán học tham chiếu đó, bài viết đã chỉ ra rằng thực tế dạy học Toán ở tiểu học chưa hình thành được nghĩa toán tử của phân số cho học sinh. Hệ quả là sự không đầy đủ trong kiến thức của các học sinh. Các em có thể thực hiện được các quy tắc nhân phân số, nhưng lại không huy động được phép toán này vào việc giải quyết một số vấn đề của toán học và thực tiễn. Khẳng định này đã được hợp thức hoá bằng một nghiên cứu thực nghiệm trình bày ở cuối bài báo.

Từ khóa: phân số; nghĩa toán tử của phân số; tổ chức toán học tham chiếu

1. Đặt vấn đề

Phân số tác động vào nhiều hoạt động khác nhau của cuộc sống hàng ngày, như phân chia, so sánh, đo lường... Trong nhà trường, không ít môn học sử dụng phân số như: Địa lí, Vật lí, Hoá học, Kĩ thuật, Hội hoạ… Trong bản thân toán học, kiến thức về phân số cần thiết cho việc hiểu các số thập phân cũng như những phép toán trên chúng, và để làm việc với các số hữu tỉ. Mối liên hệ này cũng đã được chương trình môn Toán ở trường phổ thông tính đến: phân số bắt đầu xuất hiện từ lớp 2, được trình bày một cách có hệ thống ở lớp 4, là nền tảng cho việc nghiên cứu số thập phân ở năm cuối bậc tiểu học và tập số hữu tỉ ở trung học cơ sở.

Ý tưởng về phân số đã xuất hiện rất sớm trong lịch sử toán học, ở các nền văn minh Babylon và Ai Cập (tất nhiên không phải ở dạng như hiện tại), bắt nguồn từ những vấn đề nảy sinh trong cuộc sống liên quan đến đo lường, chia tách một đối tượng, so sánh, thừa kế

Cite this article as: Le Thi Hoai Chau, & Pham Thanh Dat (2021). Knowledge of primary students on the operator meaning of fractions. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(8), 1538-1552.

và phân phối. Trải qua nhiều thời kì, phân số gắn với việc giải quyết những vấn đề khác nhau, và từ đó có nhiều nghĩa khác nhau. Lịch sử tiến triển của phân số để lại những dấu vết chứng tỏ sự phức tạp của nó. Chính sự phức tạp ấy khiến phân số là một đối tượng dạy học (DH) đặt ra nhiều vấn đề cho cả giáo viên lẫn học sinh (HS). Một số công trình nghiên cứu đã cho thấy là "học sinh ở nhiều nước có những khó khăn chung trong việc hiểu khái niệm phân số, thực hiện các quy tắc tính toán và sau đó sử dụng vào việc giải quyết những vấn đề của toán học hay ngoài toán học" (Le & Nguyen, 2018, p.29). Một trong nguyên nhân gây khó khăn cho việc hiểu khái niệm phân số chính là tính đa nghĩa của nó.

Câu hỏi nghiên cứu đầu tiên được đặt ra là: *việc DH toán ở tiểu học đã hình thành cho HS những nghĩa nào về phân số? HS hiểu mỗi nghĩa ra sao?*

Lưu ý rằng tập số nguyên $\mathbb{Z}$ chưa được nghiên cứu ở tiểu học, nên trong phần tiếp theo của bài báo này thuật ngữ "phân số" dùng để nói về những phân số không âm. Như vậy, khi nói đến $\frac{a}{b}$ thì ta hiểu rằng $a, b \in \mathbb{N}$ và $b \neq 0$.

1.1. Các nghĩa của phân số

Về các nghĩa của phân số, giữa các nhà nghiên cứu không có sự đồng thuận tuyệt đối. Mỗi tác giả đề xuất một họ nghĩa khác nhau, tuỳ theo mục tiêu nghiên cứu của họ.

> Kieren (1976) là người đầu tiên tách phân số thành bốn nghĩa có quan hệ gắn bó với nhau: Tỉ số, toán tử, thương, đo lường. Tác giả không xem "phân số như một phần của tổng thể" là một nghĩa riêng mà cho rằng nó được chứa đựng trong bốn nghĩa đã liệt kê. Behr, Lesh, Poste, & Silver (1983) thì đề nghị một mô hình lí thuyết cho phép liên kết các nghĩa khác nhau của phân số, nhưng lại tách "phân số - một phần của tổng thể" thành nghĩa riêng biệt. Một số tác giả khác cũng đưa ra những mô hình của riêng mình, cố gắng mô tả tính đa nghĩa của khái niệm phân số. Những mô hình này có phần trùng nhau nhưng không tương đương, trong cả việc xác định các nghĩa lẫn mối liên hệ giữa chúng.
>
> (Le & Nguyen, 2018, p.29)

Đề nghị của Kieren có lí của nó nếu xét về mặt toán học. Thế nhưng, trong lịch sử, thì việc hình thành khái niệm phân số đã bắt đầu từ các phân số đơn vị (phân số có tử số bằng 1). Như vậy là nghĩa *một phần của tổng thể* (kí hiệu là *phần/tổng thể* trong phần còn lại của bài báo) được hình thành đầu tiên. Và cũng chính vì nghĩa này được chứa đựng trong bốn nghĩa *tỉ số, toán tử, thương, đo lường* như Kieren phân tích, nên trong DH thì người ta thường bắt đầu từ nó, rồi lấy đó làm điểm tựa để đưa vào bốn nghĩa kia. Chính từ ghi nhận ấy mà quan niệm tách phân số thành năm nghĩa được thừa nhận trong các nghiên cứu trình bày ở bài viết này.

Phần dưới của bài viết chỉ làm rõ nghĩa *toán tử* còn rất ít được xem xét trong các công trình nghiên cứu trong nước. Về bốn nghĩa kia, bạn đọc có thể tìm thấy một trình bày chi tiết trong Lamon (2012), Duong (2014), Le & Nguyen (2018).

Trước khi giới thiệu nghĩa *toán tử* cần phải làm rõ thuật ngữ *toán tử* vốn không xuất hiện ở bậc tiểu học. Trong toán học, *toán tử* (tiếng Anh: operator, tiếng Pháp: opérateur) *chỉ* *một hàm hoặc phần tử của một tập hợp tác động lên một tập hợp khác* (tham khảo Manturov et al., 1993; Ngo, Doan, & Nguyen, 2000). Toán tử nếu là hàm một biến được gọi là toán tử một ngôi, nếu là hàm hai biến được gọi là toán tử hai ngôi – tổng quát, nếu là hàm *n* biến thì được gọi là toán tử *n*-ngôi. Đi kèm với *toán tử* còn có thuật ngữ *phép toán* (tiếng Anh: operation, tiếng Pháp: opération) và đôi khi người ta dùng không phân biệt chúng.

Đối với phân số, nghĩa *toán tử* xuất hiện trong những *"tình huống phải thực hiện phép nhân một số với phân số. Ví dụ: một người đã bị thua $\frac{1}{4}$ số bi của mình, hay đã dùng 70% số tiền 500 ngàn đồng*" (Le & Nguyen, 2018, p.30). Cụ thể hơn:

> (...) phân số cũng được trình bày như một toán tử trong các tình huống liên quan đến phép nhân một số với một phân số. Ví dụ: nếu 24 cục tẩy được đưa vào một máy đóng gói và máy đưa ra 12 gói, thì có nghĩa là phép toán $\frac{1}{2} \times 24 = 12$ đã được thực hiện. Trong trường hợp này, $\frac{1}{2}$ không biểu diễn một phần của tổng thể (ví dụ: $\frac{1}{2}$ cục tẩy), mà là một đại lượng đã tác động lên 24 cục tẩy. Các tình huống mà phân số được sử dụng như một toán tử có thể được biểu diễn bằng sơ đồ minh họa dưới đây:

(Ministère l'Éducation de l'Ontario, 2008, p.37)

Như vậy, nghĩa *toán tử* của phân số gắn liền với tình huống *tìm $\frac{a}{b}$ của một đại lượng*. Lúc này, **một phân số** không đại diện cho một kích thước hay số lượng, mà đề cập đến **một hàm**, một ánh xạ. Nó mô tả sự biến đổi một đại lượng thành một một đại lượng khác, hay đặt tương ứng một tập hợp (hoặc miền) với một tập hợp (miền) khác, bằng cách tăng-giảm, co-giãn hay phóng to-thu nhỏ, tùy vào bản chất của đại lượng đó (tham khảo Behr et al., 1982).

1.2. Nghĩa "toán tử": *Học sinh tiểu học cần hiểu gì?*

Một trình bày ngắn gọn phân tích tri thức luận ở trên cho thấy sự khó hiểu của nghĩa *toán tử* của phân số. Hoàn toàn tự nhiên, không thể nào nói về nghĩa này với HS tiểu học. Điều quan trọng là: ***trước những tình huống cần tìm $\frac{a}{b}$ của một đại lượng, hay cần phóng to-thu nhỏ $\frac{a}{b}$ lần một đối tượng, HS biết rằng phải nhân đại lượng hay đối tượng đó với $\frac{a}{b}$***. Điều này có nghĩa là HS đã hiểu vai trò công cụ của phép toán nhân với phân số. Việc hiểu này có ý nghĩa quan trọng, khi mà DH toán trong thực tế thường quá chú trọng vào các quy tắc tính toán, bỏ qua hoặc coi nhẹ vấn đề dạy khái niệm và hình thành nghĩa của khái niệm. Theo xu hướng này, người ta quên mất rằng chính nghĩa của một khái niệm làm nên lí do tồn tại của nó. Tại sao lại bắt HS học quy tắc nhân phân số và sau đó giải nhiều bài tập luyện tập sử dụng quy tắc nếu như họ không biết nó được dùng để làm gì?

Lập luận trên giải thích cho câu hỏi nghiên cứu được đặt ra trong bài báo này: ***việc DH phân số đã hình thành được cho HS cuối cấp tiểu học nghĩa toán tử hay chưa?***

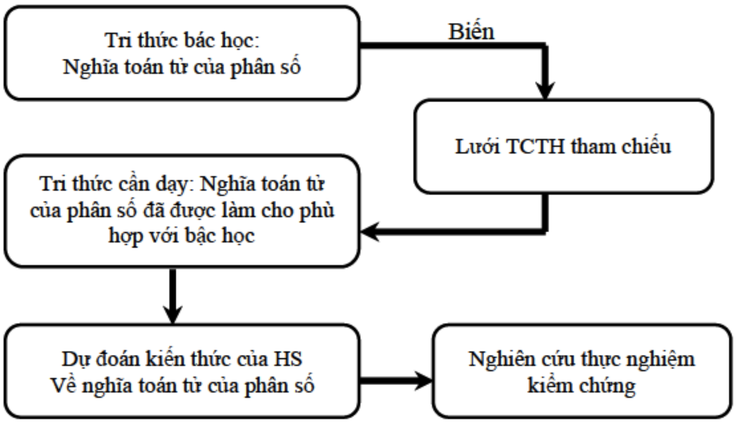
2. Phương pháp luận nghiên cứu

Câu hỏi trên liên quan đến vấn đề xem xét sự chuyển hoá sư phạm ngoại vi, tức mắt xích "tri thức bác học → tri thức cần dạy". Theo đề xuất của Chevallard (1992) thì có thể dùng công cụ *tổ chức toán học* (TCTH) để phân tích sự chuyển hoá sư phạm này. Mỗi TCTH được hình thành từ một kiểu nhiệm vụ (KNV). Như vậy, cần phải xác định hệ thống các KNV liên quan đến nghĩa *toán tử* mà việc DH phân số ở tiểu học đưa vào. Vấn đề tiếp theo là xem xét tính đầy đủ hay không của hệ thống những KNV đó. Để làm điều đó thì người ta có thể đối chiếu nó với một *lưới TCTH tham chiếu*.

> Lưới TCTH tham chiếu cung cấp bản đồ các vấn đề mà nhà nghiên cứu có thể sử dụng để phân tích một thể chế xác định hay thực hành dạy học, cũng là điểm tựa để giáo viên thiết kế dự án dạy học của mình.
>
> (Le & Comiti, 2018, p.127)

Làm thế nào để xây dựng lưới TCTH tham chiếu này? Trước hết, *việc thiết lập các TCTH tham chiếu phải được thực hiện trên cơ sở phân tích tri thức luận về đối tượng tri thức đang bàn đến*. Đồng thời, người ta còn sử dụng khái niệm hệ sinh KNV để thành lập lưới. Hệ sinh KNV là một hệ thống các KNV hình thành từ một KNV nào đó kết hợp với một hệ thống các biến. Những biến này và giá trị lựa chọn gán cho chúng phụ thuộc vào mục đích của nhà nghiên cứu (tham khảo Le & Comiti, 2018, p.132-132).

Sơ đồ dưới đây trình này phương pháp luận nghiên cứu để tìm câu trả lời đã được đặt ra.



3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Thiết lập lưới tổ chức toán học tham chiếu

- ***Hai tổ chức toán học được giữ lại từ phân tích tri thức luận***

Như đã nói, toán tử là một thuật ngữ toán học có hai nghĩa:

1. Phần tử của một tập hợp tác động lên một tập hợp khác.

2. Đồng nghĩa với nghĩa "ánh xạ" và "hàm".

(Ngo, Doan, & Nguyen, 2000)

Cách hiểu thứ hai khá quen thuộc với người làm toán. Cách hiểu thứ nhất sẽ được giải thích rõ thêm ở dưới.

Theo cách hiểu này, Davis (1991, pp.91-93) đã lấy nghĩa *toán tử* của phân số để minh họa cơ sở toán học của việc xây dựng trường số hữu tỉ. Xét về mặt toán học, $\frac{a}{b}$ là toán tử tương ứng với hàm $f: b\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn tính chất $f(m+n) = f(m) + f(n)$ và được xác định bởi $f(b) = a$, trong đó $b \in \mathbb{Z}$, $b\mathbb{Z} = \{bz: z \in \mathbb{Z}\}$. Behr và cộng sự (1982) xem phân số $\frac{a}{b}$ là hàm biến đổi một hình hình học thành một hình hình học khác với hình dạng tương tự và có kích thước bằng $\frac{a}{b}$ hình ban đầu, hoặc biến đổi một tập hợp thành một tập hợp khác có số phần tử gấp $\frac{a}{b}$. Khi hoạt động trên một đối tượng liên tục (chiều dài chẳng hạn), toán tử $\frac{a}{b}$ như một tổ hợp *giãn-co*. Khi hoạt động trên một đối tượng rời rạc, toán tử $\frac{a}{b}$ như một tổ hợp *nhân-chia*, biến đổi tập hợp có *n* phần tử thành một tập hợp có *na* phần tử, và sau đó số này được giảm xuống qua phép chia *na* cho *b*. Tóm lại, nghĩa *toán tử* của phân số $\frac{a}{b}$ liên quan đến phép nhân $\frac{a}{b}$ với một đại lượng, được hình thành qua các tình huống liên quan đến phép nhân phân số. Phép toán này gồm ba trường hợp:

- nhân một số tự nhiên với phân số
- nhân phân số với một số tự nhiên
- nhân hai phân số.

Trong sự nối tiếp với phép nhân hai số tự nhiên (hiểu theo nghĩa "phép cộng lặp lại"), tích $n \times \frac{a}{b}$ được hiểu là n lần $\frac{a}{b}$. Lúc này phân số vẫn được hiểu theo nghĩa *phần/tổng thể*. Tuy nhiên, khi chưa có tính giao hoán của phép nhân thì việc nghiên cứu tích $\frac{a}{b} \times n$ bị cản trở với cách hiểu này (tham khảo Le & Nguyen, 2018, p.33). Cách hiểu ấy cũng không thể vận dụng cho trường hợp nhân hai phân số. Vì lẽ đó, trong lưới TCTH tham chiếu sẽ xây dựng, bài viết này chỉ xem xét những KNV liên quan đến hai phép toán $\frac{a}{b} \times n$ và $\frac{a}{b} \times \frac{c}{\mathrm{d}}$ mà việc DH có thể làm cho HS hiểu rõ nghĩa *toán tử* của phân số qua việc nghiên cứu chúng. KNV tổng quát bao trùm lên tập hợp các KNV này và cho phép làm rõ nghĩa *toán tử* là $\mathbf{T^1}$ = *tìm* $\frac{a}{b}$ *của một đại lượng*.

Liên quan đến một toán tử *f* có 3 KNV:

- (1) Biết quy tắc *f* và tạo ảnh là *x*, tìm ảnh *f(x)*
- (2) Biết quy tắc *f* và ảnh *y*, tìm tạo ảnh *x* của *y*
- (3) Biết một cặp tạo ảnh - ảnh (*x, y*), tìm quy tắc *f*.

Trong trường hợp f là toán tử ứng với phân số $\frac{a}{b}$, nói cách khác là phép nhân với $\frac{a}{b}$, thì ba KNV đó được phát biểu là:

- (1’) Tìm $\frac{a}{b}$ của một đại lượng
- (2’) Tìm giá trị của một đại lượng, biết $\frac{a}{b}$ của đại lượng đó
- (3’) Tìm phân số biến đổi đại lượng có giá trị a thành đại lượng có giá trị b.

Do khuôn khổ có hạn của bài báo, (2’) sẽ không được xét vì nó còn liên quan đến phép chia phân số. (1’) chính là $\mathbf{T^1}$. (3’) được kí hiệu là $\mathbf{T^2}$. Đây là 2 KNV được giữ lại để lập lưới TCTH tham chiếu bằng cách kết hợp với các biến sẽ lựa chọn.

- **Hai mô hình biểu diễn phân số được giữ lại**

Phân tích của Behr và cộng sự (1982) cho thấy để biểu diễn nghĩa *toán tử* của phân số ta có thể dùng các mô hình liên tục hoặc rời rạc. Mô hình rời rạc là một tập hợp chứa một số đối tượng rời rạc. Đếm là một thao tác cơ bản để xác định số lượng phần tử trong mô hình rời rạc. Một tập hợp rời rạc các đối tượng không phải lúc nào cũng chia được, theo nghĩa là nếu nó được chia thì kết quả sẽ không còn là đối tượng đó nữa. Ví dụ, một nửa quả táo thì không là quả táo. Như vậy, một mô hình rời rạc chỉ có thể được chia thành một số phần nhất định phù hợp với số lượng đối tượng chứa trong tập hợp. Chẳng hạn với tập hợp chứa 6 quả trứng thì có thể được chia thành hai, ba, hay sáu, nhưng không thể chia thành năm phần bằng nhau. Mô hình liên tục liên quan đến các đại lượng có số đo liên tục, như chiều dài hoặc diện tích của băng giấy. Khác với mô hình rời rạc, một mô hình liên tục có thể được chia thành bao nhiêu phần tùy ý. Ví dụ một đoạn thẳng có thể được chia thành hai, ba, năm phần bằng nhau…

Có bốn loại mô hình có thể dùng để biểu diễn phân số trong DH, đó là tập hợp (mô hình rời rạc), độ dài, diện tích, tia số (ba mô hình liên tục). Việc sử dụng các mô hình này là cần thiết, không tránh khỏi, với mọi sự chuyển hoá sư phạm trong DH toán ở tiểu học – bậc học mà các khái niệm trừu tượng cần phải được giới thiệu đi kèm với các biểu diễn trực quan (tham khảo Le & Nguyen, 2018).

Để thiết kế lưới TCTH tham chiếu, tác giả bài viết nay sẽ giữ lại mô hình tập hợp và mô hình độ dài, diện tích. Mô hình tia số không được khai thác ở đây, vì mặc dù có nhiều lợi ích lớn lao nhưng nó lại không thuận tiện cho việc mô tả nghĩa *toán tử* (tham khảo Le & Nguyen, 2018, p.32).

- **Xây dựng lưới tổ chức toán học tham chiếu**

Xét phân số $\frac{a}{b}$. Lưới TCTH tham chiếu sẽ được lập từ hai KNV:

- $\mathbf{T^1}$ = *tìm* $\frac{a}{b}$ *của một đại lượng,*
- $\mathbf{T^2}$ = *tìm phân số mà việc nhân với nó sẽ làm biến đổi đại lượng ứng với giá trị a thành đại lượng ứng với giá trị b.*

Hai biến là V_1 = *giá trị của đại lượng* (nếu đại lượng là một số) và V_2 = *mô hình biểu diễn đại lượng* (được nói đến trong $\mathbf{T^1}$, $\mathbf{T^2}$) sẽ được sử dụng để lập lưới. Khi V_1 là số n thì n có thể là bội của b, có thể không phải là bội của b, thậm chí có thể là phân số. Trong trường hợp thứ nhất thì mô hình rời rạc sẽ vận hành tốt hơn. Đối với các trường hợp còn lại thì mô hình liên tục lại chiếm ưu thế. Vì thế, các giá trị được chọn cho V_2 là *tập hợp có n* phần tử (mô hình rời rạc) nếu n chia hết cho b, hoặc *hình vẽ* (mô hình liên tục) trong trường hợp ngược lại. Bảng dưới đây mô tả lưới TCTH tham chiếu được thiết lập để phân tích tri thức cần dạy và nghiên cứu kiến thức của HS về nghĩa *toán tử* của phân số. Bảng chỉ nói đến KNV và mô tả kĩ thuật. Công nghệ chung chính là nghĩa *toán tử* của phân số.

Bảng 1. *Lưới TCTH tham chiếu liên quan đến nghĩa toán tử của phân số*

<table>
<tr><th></th><th>Kiểu nhiệm vụ</th><th>Kĩ thuật</th></tr>
<tr><td rowspan="9">T¹</td><td>$\boldsymbol{T_1^1} = T^1_{a/b\ \text{của hình vẽ}}$=Tìm $\frac{a}{b}$ của hình vẽ</td><td>Chia một hình vẽ thành b phần bằng nhau. Sau đó, đánh dấu vào a phần</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{T_2^1} = T^1_{a/b\ \text{của tập hợp}\ (n)}$= Tìm $\frac{a}{b}$ của tập hợp có n phần tử, với n chia hết cho b

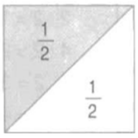
(Kĩ thuật thứ nhất chỉ vận hành được khi n không quá lớn)</td><td>Vẽ hình minh hoạ tập hợp có n phần tử. Nhóm các phần tử của tập hợp sao cho có b phần bằng nhau và đếm số phần tử của a phần</td></tr>
<tr><td>Lấy n chia cho b, được bao nhiêu nhân với a</td></tr>
<tr><td>Thực hiện phép toán $\frac{a}{b} \times n$ theo quy tắc</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{T_3^1} = T^1_{a/b\ \text{của}\ n}$= Tìm $\frac{a}{b}$ của n, với n chia hết cho b
(đối với kĩ thuật thứ nhất có thể minh hoạ bằng mô hình tập hợp khi n không quá lớn)</td><td>Lấy n chia cho b, được bao nhiêu nhân với a</td></tr>
<tr><td>Thực hiện phép toán $\frac{a}{b} \times n$ theo quy tắc</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{T_4^1} = T^1_{a/b\ \text{của}\ n*}$= Tìm $\frac{a}{b}$ của n, với n là số tự nhiên không chia hết cho b hoặc n là phân số</td><td>Thực hiện phép toán $\frac{a}{b} \times n$ theo quy tắc</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{T_5^1} = T^1_{a/b\ \text{của}\ c/d\ \text{hình vẽ}}$= Tìm $\frac{a}{b}$ của $\frac{c}{d}$ hình vẽ</td><td>Chia hình vẽ thành b phần bằng nhau và tô màu a phần. Tiếp tục chia phần đã tô màu thành d phần bằng nhau và tô màu vào c phần. Cuối cùng, tìm phân số chỉ phần tô màu hai lần</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{T_6^1} = T^1_{a/b\ \text{của}\ c/d}$ = Tìm $\frac{a}{b}$ của $\frac{c}{d}$</td><td>Thực hiện phép toán $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ theo quy tắc</td></tr>
<tr><td>T²</td><td>$T^2_{a\ \text{thành}\ b}$ = Tìm phân số biến đoạn thẳng có độ dài a thành đoạn thẳng có độ dài b</td><td>Lấy b làm tử số, a làm mẫu số</td></tr>
</table>

3.2. Nghĩa **toán tử** *trong các sách giáo khoa Toán bậc tiểu học*

Khái niệm phân số tổng quát và các phép toán trên phân số bắt đầu được nghiên cứu ở lớp 4, nhưng thực ra HS đã biết đến *phân số đơn vị* từ lớp 2, sau đó là lớp 3.

- **Nghĩa *toán tử* trong sách giáo khoa Toán 2 và Toán 3**

Lưu ý rằng ở lớp 2 và lớp 3 thì thuật ngữ *phân số* chưa xuất hiện – người ta chỉ nói đến "một phần hai, một phần ba, một phần tư…". Chẳng hạn, khái niệm "một phần hai" được SGK Toán 2 đưa vào ngay sau nội dung "Bảng chia 2", và trình bày như sau:



Chia hình vuông thành hai phần bằng nhau.
Lấy một phần, được ***một phần hai*** hình vuông.
Một phần hai được viết là $\frac{1}{2}$. Một phần hai còn gọi là một nửa.

(SGK Toán 2, 2014, tr.110)

Tình huống này hình thành nên nghĩa *phần/tổng thể* của phân số. Sau đó SGK Toán 2 yêu cầu HS giải các bài toán thuộc hai dạng. Với dạng thứ nhất, qua quan sát những hình cho sẵn, HS phải trả lời câu hỏi: *đã tô màu* $\frac{1}{2}$ *hình nào?* Ở dạng thứ hai, trên một hình vẽ biểu diễn một tập hợp rời rạc có một số đối tượng được khoanh vùng, và câu hỏi đặt ra cho HS là: *hình nào đã khoanh vào* $\frac{1}{2}$ *số đối tượng?* Để giải quyết những bài toán thuộc loại này, HS cần đếm số phần tử của tập hợp đã cho rồi thực hiện chép chia số đó cho 2. Ta thấy là dù phép nhân với $\frac{1}{2}$ chưa thể trình bày tường minh, nhưng rõ ràng là cách trình bày của Toán 2 cho thấy mối liên hệ giữa $\frac{1}{2}$ với phép chia cho 2.

Ta thấy ở đây xuất hiện hai kiểu nhiệm vụ sau, nhưng chỉ trong trường hợp *a = 1*.

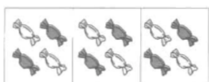
- $\boldsymbol{T_1^1} = T^1_{a/b \text{ của hình vẽ}}$= Tìm $\frac{a}{b}$ của hình vẽ
- $\boldsymbol{T_2^1} = T^1_{a/b \text{ của tập hợp } (n)}$= Tìm $\frac{a}{b}$ của tập hợp có *n* phần tử, với *n* chia hết cho *b*

Theo một cách hoàn toàn tương tự, SGK Toán 2 còn đưa vào các phân số $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ tương ứng sau các nội dung "Bảng chia ba", "Bảng chia bốn", "Bảng chia năm". Việc sắp xếp nội dung kiểu này thể hiện rõ ý đồ gắn các phân số đơn vị với phép chia.

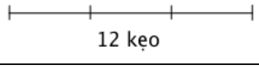
Chương trình Toán lớp 3 tiếp tục nghiên cứu "Bảng chia sáu", …, "Bảng chia chín" và lúc này thì các phân số đơn vị $\frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{9}$ được hiểu tương tự như $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ mà không trình bày tường tận cho mọi trường hợp như SGK Toán 2. Cũng vì theo chương trình lớp 3 thì HS mới chỉ nghiên cứu "phép chia cho số có một chữ số" nên các phân số đơn vị chỉ có mẫu số lớn nhất là 9. Hai dạng toán đã nghiên cứu ở lớp 2 vẫn gặp lại. Ngoài ra, SGK còn đưa thêm nội dung "Tìm một trong các phần bằng nhau của một số" và ở đó một KNV mới xuất hiện.

TÌM MỘT TRONG CÁC PHẦN BẰNG NHAU CỦA MỘT SỐ

Bài toán: Chị có 12 cái kẹo. Chị cho em $\frac{1}{3}$ số kẹo đó. Hỏi chị cho em mấy cái kẹo?



Nhận xét: chia 12 cái kẹo thành 3 phần bằng nhau. Mỗi phần đó là $\frac{1}{3}$ số kẹo.



Bài giải

Chị cho em số kẹo là:

12 : 3 = 4 (cái)

Đáp số: 4 cái kẹo

(SGK Toán 3, 2014, tr.26)

Bài toán "chia kẹo" chính là KNV đã gặp ở lớp 2 ($\boldsymbol{T_2^1} = T^1_{a/b \text{ của tập hợp } (n)}$= *Tìm* $\frac{a}{b}$ *của tập hợp có n phần tử, với n là bội của b*). Nó có mặt ở đó chỉ để hình thành nên kĩ thuật giải KNV mới là $\boldsymbol{T_3^1} = T^1_{a/b \text{ của } n}$= *Tìm* $\frac{a}{b}$ *của n, với n chia hết cho b.* Hiển nhiên người ta cũng chỉ xét trường hợp a =1. Kĩ thuật là "lấy *n* chia cho *b*".

Tóm lại, cuối lớp 3, HS đã biết xét ba KNV đầu tiên của bảng trên, nhưng chỉ trong trường hợp *a = 1*, bởi chương trình mới chỉ đề cập đến các phân số đơn vị $\frac{1}{b}$ (mẫu số $2 \le b \le 9$).

- **Nghĩa *toán tử* trong sách giáo khoa Toán 4**

Lúc này khái niệm phân số được định nghĩa tường minh và các phép toán của phân số được nghiên cứu một cách có hệ thống. Tất nhiên, định nghĩa tổng quát (trừu tượng) về phân số không được giới thiệu, mà người ta vẫn dùng mô hình trực quan (tô màu một hình) để đưa vào những phân số $\frac{a}{b}$ cụ thể.

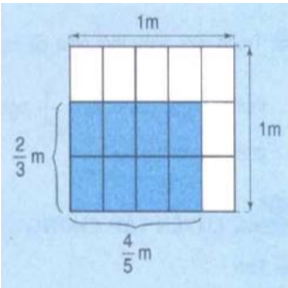
Các nghĩa *phần/tổng thể, thương, tỉ số, đại lượng* đều đã được đưa vào, cũng nhờ các mô hình tập hợp, độ dài, diện tích, và qua những bài toán cụ thể.

SGK Toán 4 đưa vào phép nhân hai phân số qua tình huống *tính diện tích hình chữ nhật có chiều dài* $\frac{4}{5}m$ *và chiều rộng* $\frac{2}{3}m$. Vốn HS lớp 4 đã biết từ trước công thức tính diện tích hình chữ nhật, tất nhiên chỉ làm việc với kích thước là số tự nhiên. Để giải bài toán này, SGK Toán 4 mặc nhiên mở rộng công thức đó cho trường hợp số đo các cạnh là phân số, rồi dùng hình vẽ để đưa ra kết quả, và sau đó phát biểu luôn quy tắc nhân tổng quát.

Ví dụ: *tính diện tích hình chữ nhật có chiều dài* $\frac{4}{5}m$ *và chiều rộng* $\frac{2}{3}m$.

a) Để tính diện tích hình chữ nhật trên ta phải thực hiện phép nhân: $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

b) Ta tính diện tích này dựa vào hình vẽ bên.



Nhìn trên hình vẽ ta thấy:

- Hình vuông có diện tích bằng $1m^2$ và gồm 15 ô, mỗi ô có diện tích bằng $\frac{1}{15}\ m^2$.
- Hình chữ nhật (phần tô màu) chiếm 8 ô. Do đó diện tích hình chữ nhật bằng $\frac{8}{15}\ m^2$.

c) Ta thực hiện phép nhân như sau: $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$

Muốn nhân hai phân số ta lấy tử số nhân với tử số, mẫu số nhân với mẫu số

(SGK Toán 4, 2014, tr.132)

Như vậy, thông qua bài toán trên, SGK đưa vào quy tắc nhân hai phân số với một lời giải thích không rõ ràng. Nghĩa *toán tử* không được hình thành ở đây, vì quy trình làm nên nghĩa đó (*chia hình vẽ thành 3 phần bằng nhau, tô màu 2 phần; chia phần tô màu thành 5 phần bằng nhau, tô màu 4 phần. Phần tô màu hai lần là* $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$) đã không được giới thiệu tường minh. Các ví dụ, bài tập sau đó đều chỉ là những nhiệm vụ thuộc kiểu *tính* $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ hoặc tính diện tích một hình chữ nhật có số đo các cạnh là phân số bằng cách áp dụng quy tắc nêu trên.

Các phép toán $n \times \frac{a}{b}$ và $\frac{a}{b} \times n$ đưa vào sau đó đều được xem là trường hợp riêng của phép nhân hai phân số. Cho đến lúc này SGK Toán 4 chỉ đưa vào các quy tắc tính toán, theo một cách áp đặt cho trường hợp nhân hai phân số. Tuy nhiên, sau đó có mục "Tìm phân số của một số", bắt đầu bằng tình huống sau :

Bài toán: Một rổ cam có 12 quả. Hỏi $\frac{2}{3}$ số cam trong rổ là bao nhiêu quả cam.

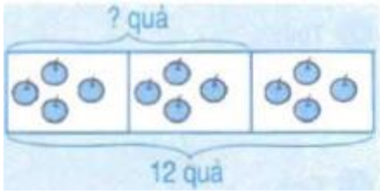
Nhận xét: $\frac{1}{3}$ số cam trong rổ là: 12 : 3 = 4 (quả)

$\frac{2}{3}$ số cam trong rổ là: 4 × 2 = 8 (quả)

Ta có thể tìm $\frac{2}{3}$ số cam trong rổ như sau:

$12 \times \frac{2}{3} = 8$ (quả)

Muốn tìm $\frac{2}{3}$ của số 12 ta lấy số 12 nhân với $\frac{2}{3}$.



(SGK Toán 4, 2014, tr.135)

Ta gặp lại ở đây KNV đã nghiên cứu ở các lớp dưới ($\boldsymbol{T_2^1} = T^1_{a/b \text{ của tập hợp } (n)}$: Tìm $\frac{a}{b}$ của tập hợp có *n* phần tử, với *n* chia hết cho *b*), nhưng nếu như trước kia chỉ xét với *a* = 1 thì lúc này *a* có thể lấy giá trị nguyên dương khác 1. Cũng từ bài toán trên, SGK đã đưa vào kĩ thuật giải quyết KNV $\boldsymbol{T_3^1} = T^1_{a/b \text{ của } n}$: Tìm $\frac{a}{b}$ của *n*, với *n* chia hết cho *b*. Giống như $\boldsymbol{T_2^1}$, ở đây KNV này được mở rộng cho những trường hợp $a \neq 1$. Ba nhiệm vụ thuộc $\boldsymbol{T_3^1}$ sau đó được SGK yêu cầu HS giải quyết. Ví dụ:

Một lớp học có 35 học sinh, trong đó $\frac{3}{5}$ số học sinh được xếp loại khá. Tính số học sinh xếp loại khá của lớp đó.

(SGK Toán 4, 2014, tr.135)

Đó là những gì duy nhất mà SGK Toán 4 đề cập đến nghĩa *toán tử* của phân số. Ở lớp 5, những kiến thức đã học về phân số được nhắc lại, ngoài ra chương trình đưa vào khái niệm hỗn số. Không có thêm một KNV nào mới nói lên bản chất của nghĩa *toán tử*.

3.3. *Quan hệ cá nhân của học sinh tiểu học Việt Nam về nghĩa* toán tử

Phân tích trên cho thấy rất nhiều KNV cho phép hiểu nghĩa *toán tử* đã không được đề cập trong DH phân số ở các lớp 2, 3, 4. Nó cho phép đưa ra giả thuyết sau về kiến thức của HS tiểu học: "Học sinh không huy động phép nhân hai phân số khi giải quyết các tình huống liên quan đến bài toán tìm $\frac{a}{b}$ của một đại lượng mà giá trị của đại lượng được cho ở dạng phân số".

- **Nghiên cứu thực nghiệm**

Giả thuyết trên được kiểm chứng qua một thực nghiệm. Thực nghiệm được thiết kế với 3 bài toán xoay quanh KNV $\boldsymbol{T_6^1} = T^1_{a/b \text{ của } c/d}$ = *Tìm* $\frac{a}{b}$ *của* $\frac{c}{d}$.

Bài toán 1. *Viết phân số thích hợp vào chỗ chấm.*

a) $\frac{1}{2}$ của $\frac{1}{4}$ kg là ……. kg ; b) $\frac{2}{3}$ của $\frac{3}{4}$ m là ……. m.

Bài toán 2. *Trong tủ lạnh Tùng có* $\frac{3}{4}$ *chiếc bánh Pizza. Vào buổi trưa, Tùng ăn* $\frac{1}{3}$ *phần bánh trong tủ lạnh. Hỏi buổi trưa Tùng đã ăn bao nhiêu phần của chiếc bánh Pizza*?

Bài toán 3. *Lan được mẹ cho* $\frac{3}{5}$ *số bánh có trong một hộp bánh quy. Sau đó, Lan đã ăn hết* $\frac{5}{7}$ *số bánh được mẹ cho. Hỏi Lan đã ăn bao nhiêu phần hộp bánh quy?*

- **Những chiến lược giải dự kiến xuất hiện ở HS**

Chiến lược S_1 "tuổi thuyền trưởng"[1]. HS có thể kết hợp hai phân số đã cho với một trong các phép toán cộng; trừ; nhân hoặc chia sao cho đáp án chấp nhận được.

Chiến lược S_2 "sử dụng một đơn vị chuyển đổi". Tìm $\frac{a}{b}$ của $\frac{c}{d}$ sẽ được gắn vào một đơn vị nào đó ví dụ như *M*, từ đó dẫn đến việc tìm $\frac{c}{d}$ của M và tìm $\frac{a}{b}$ của "$\frac{c}{d}$ của *M*". Vì các đơn vị đo cho trong đề bài đều quen thuộc nên có thể hình dung lời giải có được bằng cách chuyển đơn vị đo. Chẳng hạn, với Bài toán 1a đơn vị gắn vào phân số $\frac{1}{4}$ là kg, do đó lời giải có thể là :

$\frac{1}{4}$ kg = $\frac{1}{4}$ của 1000g = 1000g : 4= 250g

$\frac{1}{2}$ của $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{2}$ của 250g = 250g : 2= 125g = $\frac{1}{8}$ kg.

Chiến lược S_3 "sử dụng hình vẽ minh họa 1 đơn vị". Theo chiến lược này trước tiên vẽ hình biểu thị cho đơn vị và đánh dấu vào $\frac{c}{d}$ của hình. Sau đó, đánh dấu vào $\frac{a}{b}$ của phần đã đánh đấu. Phân số chỉ phần được đánh dấu trong đơn vị là phân số cần tìm.

Chiến lược S_4 "sử dụng phép nhân hai phân số" là chiến lược tối ưu trong cả 3 bài toán.

- **Những biến được chọn trong thiết kế các bài toán thực nghiệm**

Phần dưới mô tả các biến và giá trị của biến được chọn để thiết kế 3 bài toán thực nghiệm. Ba bài toán này đều thuộc KNV $\mathbf{T^1}$= *Tìm* $\frac{a}{b}$ *của* $\frac{c}{d}$.

Biến V_1 = cấu tạo của hai phân số được cho. Các giá trị của biến V_1 được mô tả là V_{1a}: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ và $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$; V_{1b} : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ và $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > 1$ và V_{1c} "$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > 1$". Giá trị của biến này tạo ra các thông tin loại trừ lẫn nhau khi hợp thức chiến S_1.

Biến *V_2 = sự xuất hiện của đơn vị gắn với phân số*. Các giá trị của biến V_2 là *V_{2a} = không xuất hiện đơn vị*; *V_{2b} = đơn vị của phân số gắn với đại lượng đã cho cũng là*

[1] "Tuổi thuyền trưởng" là bài toán do Brousseau (1990) xây dựng để nghiên cứu một kiểu ứng xử của HS trong những tình huống không quen thuộc. Tác giả đã chỉ ra rằng trong trường hợp này thì HS không quan tâm đến nghĩa của phép toán và bản chất dữ kiện cho trong đề bài, chỉ tìm cách kết hợp dữ kiện vào những phép toán đã học để tìm câu trả lời mà họ cho là phù hợp (tham khảo A.Bessot et al, 2009, p.198).

đơn vị của phân số được yêu cầu trong đáp số và V_{2c} = *đơn vị của phân số gắn với đại lượng đã cho khác với đơn vị của phân số được yêu cầu trong đáp số*. Giá trị V_{2b} được chọn nhằm tạo ra những yếu tố cho sự xuất hiện của chiến lược S_2 và chiến lược S_3.

Biến V_3 = *sự tương thích của phân số đã cho với hình vẽ minh họa đơn vị.* Các giá trị của biến V_3 là V_{3a} = *tương thích* và V_{3b} = *không tương thích*. Việc chọn giá trị V_{3a} sẽ tạo ra các yếu tố thuận lợi cho sự xuất hiện của chiến lược S_4.

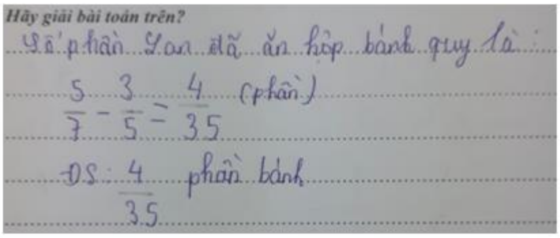
- **Kết quả thực nghiệm**

Thực nghiệm được tiến hành trên 40 HS lớp 6. Thời gian thực nghiệm là vào cuối tháng 8 đầu tháng 9 của năm học 2018-2019, thời điểm này HS tham gia thực nghiệm đã hoàn thành xong chương trình tiểu học và bắt đầu vào năm học mới. Học sinh chưa học thêm kiến thức mới, đồng thời đã được tổng kết những vấn đề cơ bản về phân số ở chương trình tiểu học.

Bảng 2. *Thống kê câu trả lời của học sinh*

Chiến lược		Bài toán 1a	Bài toán 1b	Bài toán 2	Bài toán 3
Chiến lược **S_1**	Cộng	19	18		2
	Trừ	6	6	19	17
	Chia	6	7	12	12
	Phối hợp nhiều phép toán			4	4
Chiến lược **S_2**		**4**	**4**		
Chiến lược **S_3**					
Chiến lược **S_4**					**1**
Chiến lược khác		5	5	5	4
Tổng		40	40	40	40

Mặc dù các giá trị của biến V_1 đã được lựa chọn nhằm hạn chế sự xuất hiện của nó, chiến lược **S_1** (tuổi thuyền trưởng) vẫn được HS lựa chọn nhiều nhất khi giải cả ba bài toán (31/40 với 1a và cũng chừng ấy với 1b, 35/40 với bài 2 và 35/40 với bài 3). Một trong những lời giải như thế được minh hoạ ở Hình 1.



Hình 1. *Minh họa chiến lược S_1 của HS trong Bài toán 2*

Trái lại, chiến lược **S_2** (*sử dụng một đơn vị chuyển đổi*) rất ít được HS sử dụng, mặc dù, giá trị đã chọn của các biến V_2 có thể tạo cơ hội cho chiến lược này xuất hiện. Chiến lược S_3 (sử dụng hình vẽ minh họa 1 đơn vị) cũng không được sử dụng. Điều này không nằm ngoài dự kiến, vì nó hầu như không được trình bày trong các SGK toán tiểu học, trừ một trường hợp ngầm ẩn khi đưa vào quy tắc nhân hai phân số đã chỉ ra trong phân tích sách giáo khoa ở trên.

Chiến lược S_4 (nhân hai phân số) chỉ được sử dụng bởi 1 HS đối với Bài toán 3, mặc dù giá trị của biến V_3 đã được chọn với mục đích tạo thuận lợi cho nó xuất hiện.

Việc phần lớn HS không giải được ba bài toán trên và đi theo chiến lược S_1 (tìm đáp số bằng cách thử nghiệm các phép toán khác nhau sao cho có một đáp số được xem là chấp nhận được) cho thấy nghĩa của phép nhân hai phân số chưa được xây dựng ở HS. Khi rời bỏ tình huống "tính diện tích hình chữ nhật" và chuyển sang một tình huống khác, cụ thể là "*tìm* $\frac{a}{b}$ *của* $\frac{c}{d}$ *một đại lượng*", HS cảm thấy lúng túng. Lúc này, các em bộc lộ những bất ổn, biểu hiện ở việc chọn và thay đổi các phép toán liên tục để đáp ứng từng bài toán. Một số ít HS theo đuổi các chiến lược khác để tìm cách tính $\frac{a}{b}$ của $\frac{c}{d}$, chẳng hạn S_2, mặc dù nó tỏ ra "tốn kém". Các em không nghĩ đến việc sử dụng phép toán nhân hai phân số (chỉ có 1 HSV chọn chiến lược S_4).

4. Kết luận và kiến nghị

Ba bài toán trên đều thuộc KNV $\mathbf{T^1}$= Tìm $\frac{a}{b}$ của một đại lượng, chính xác là "*tìm* $\frac{a}{b}$ *của* $\frac{c}{d}$". Kết quả thực nghiệm cho thấy dường như HS chưa hiểu nghĩa của phép nhân phân số. Nó cho phép khẳng định bước đầu tính thoả đáng của giả thuyết: "*Học sinh không huy động phép nhân hai phân số khi giải quyết các tình huống liên quan đến bài toán tìm* $\frac{a}{b}$ *của một đại lượng mà giá trị của đại lượng được cho ở dạng phân số*". Nói là "khẳng định bước đầu", vì thực ra tác giả bài viết này chưa phỏng vấn được HS để biết vì sao ngay cả khi sử dụng chiến lược S_1 thì các em cũng chỉ loay hoay với các phép toán cộng, trừ, chia, mà không nghĩ đến phép nhân.

Thực ra, từ phân tích các SGK còn hình thành được một giả thuyết khác cũng liên quan đến nghĩa *toán tử*: "Phép nhân phân số không được HS huy động để tìm hình phóng to, thu nhỏ một hình". Bài toán này liên quan đến KNV $\mathbf{T^2}$ = *tìm phân số mà việc nhân với nó sẽ biến làm đổi đại lượng ứng với giá trị a thành đại lượng ứng với giá trị b*. Đây cũng là một bài toán mang lại nghĩa *toán tử* cho phân số mà một số chương trình và SGK nước ngoài quan tâm. Chẳng hạn, chương trình Toán ở tiểu học của Mĩ yêu cầu HS hiểu phép nhân phân số qua "sự phóng to thu nhỏ hay thay đổi kích thước hình vẽ" (Common Core State Standards Initiative, 2010, p.36). Trái lại, việc hiểu nghĩa *toán tử* qua kiểu tình huống này không hề được chương trình hay SGK Toán ở tiểu học nói đến. Để kiểm chứng giả thuyết thứ hai này, tác giả bài viết cũng đã tiến hành một thực nghiệm với HS, nhưng không thể trình bày trong khuôn khổ có hạn của bài viết.

Nghiên cứu đã thực hiện cho phép củng cố thêm ghi nhận của nhiều nhà nghiên cứu khác về những khó khăn trong việc hiểu và sử dụng khái niệm phân số của HS tiểu học. Khó khăn ấy chứa đựng nhiều vấn đề mà nguồn gốc trước hết nằm ở tính đa nghĩa và đa biểu diễn của khái niệm phân số. Kết quả nghiên cứu cho thấy vết của nghĩa *toán tử* trong thể chế dạy học toán bậc tiểu học ở Việt Nam xuất hiện khá mờ nhạt, trong khi chính nghĩa ấy cho thấy vai trò công cụ của phép nhân hai phân số. Sự thiếu vắng nghĩa *toán tử* gây ra những khó khăn khi giải quyết tình huống liên quan $\frac{a}{b}$ của một đại lượng mà giá trị của đại lượng được cho ở dạng phân số. Điều đó chứng tỏ cần phải xây dựng một tình huống dạy học bổ sung vào quan hệ cá nhân của HS với KNV "tìm $\frac{a}{b}$ của $\frac{c}{d}$". Đây là một hướng nghiên cứu phát triển tiếp từ nghiên cứu này.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆUTHAM KHẢO

Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1982). Interpretations of Rational Number Concepts. In L. Silvey & J. Smart (eds.). *Mathematics for Grades 5-9, 1982 NCTM Yearbook (pp. 59-72)*. Reston, Virginia: NCTM.

Bessot A., Comiti C., Le T. H. C., & Le, V. T. (2009), *Eléments fondamentaux de Didactique des Mathématiques.* Publishing House of the National University of Ho Chi Minh City.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique, le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309-336, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12/1, 73-112. Grenoble: La Pensée Sauvage Édition.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Davis G. (1991) *Fractions as Operators and as Cloning Machines.* In: Hunting R.P., Davis G. (eds) Early Fraction Learning. Recent Research in Psychology. Springer, New York, NY

Duong, H. T. (2014). *Day hoc phan so o truong tieu hoc thong qua hoat dong giai cac bai toan* [*Teach fractions in primary school through problem-solving activities*]. Doctoral thesis. Science of education, specialty: Didactics of mathematics. Ho Chí Minh City University of Education. Ho ChI Minh City

Do, D. H. et al. (2014). *Sach giao khoa Toan 2, 3, 4, 5* [*Manual of Mathematics 2,3,4,5*]. Vietnam Education Publishing House.

Kieren T. E. (1976), *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers*. In R. Lesh (Ed.) Number and Measurement: Papers frome a Researche Worksop ERIC/SMEAC, 101-144, Columbus, OH.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge New York and London.

Le, T. H. C. (2018). *Thuyet Nhan hoc trong Didactic Toan* [*The anthropological theory of didactics mathematics*]. Ho Chi Minh City. Publishing House of Ho Chi Minh City University of education, *ISBN:* 978-604-958-410-7.

Le, T. H. C., & Nguyen, L. H. T. (2018). Day hoc phan so o tieu hoc: Mot nghien cuu khai thac cac bieu dien truc quan [Teaching the fraction in primary school: a study aiming at exploiting models of concrete representation]. *Ho Chí Minh City University of Education Journal of Science*, *15*(1), 27-39.

Manturov O. V., Solntxev In.k., Sorkin In.I., & Phedin N.G. (1993) *Dictionary explains the mathematical terminologies* [*Tu đien giai thich thuat ngu Toan hoc*]. Translator: Hoang Huu Nhu and Le Dinh Thinh.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2008). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année*. Canada.

Ngo, T. L., Doan, Q., & Nguyen, D. T. (2003). *Tu đien Toan hoc thong dung* [*Common mathematical dictionary*]. Hue: Vietnam Education Publishing House.

KNOWLEDGE OF PRIMARY STUDENTS ON THE OPERATOR MEANING OF FRACTIONS

***Le Thi Hoai Chau*[1*]*, Pham Thanh Dat*[2]**

[1]*Van Hien University, Vietnam*

[2]*Viet Au High School, Ho Chi Minh City, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Le Thi Hoai Chau – Email: chaulth@vhu.edu.vn*

Received: November 28, 2019; Revised: March 23, 2020; Accepted: April 08, 2021

ABSTRACT

The multi-signification of the notion of fraction is at the origin of the difficulties encountered by primary school pupils to understand and use this notion. Among the signification of fractions, the meaning of operator is related to the instrumental role of the multiplication of fractions. Our epistemological research has enabled us to build a reference grid for mathematical organization that must be built in teaching to help students understand the need for the multiplication of fractions. This grid of reference of mathematical organizations helped us analyze the teaching of mathematics in elementary schools. It was found that the teaching did not succeed in completely constructing the signification of the operator of the fractions for the pupils. Therefore, the knowledge of the students is incomplete. They can implement the rules for multiplying fractions, but they do not know how to use this operation to solve some math and reality problems. This statement has been validated by an experimental study presented at the end of the article.

Keywords: fraction; signification of operator; reference mathematical organization