ON NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR LOCAL WEAK PARETO MINIMUM IN VECTOR OPTIMIZATION PROBLEM WITH CONSTRAINTS

Vu Thi Thu Loan[1], **Tran Van Su**[2], **Dinh Dieu Hang**[3*]
[1]*TNU - University of Agriculture and Forestry,* [2]*Quang Nam University*
[3]*TNU - University of Information and Communication Technology*

ARTICLE INFO

Received: 16/4/2021
Revised: 27/5/2021
Published: 31/5/2021

KEYWORDS

Second-order necessary optimality conditions
Local weak Pareto minimum
Clarke's generalized derivatives
Optimality condition
Páles and Zeidan's second-order upper generalized direc- tional derivatives

ABSTRACT

The vector optimization problem with set and inequalities constraints (also called as multiobjective optimization problem with constraints) is considered in this paper for which the data is of real Banach spaces. Using the regularity condition in the sense of Clarke's derivatives in which the objective function and the constraints function are Gâteaux differentiable at the given optimal point, we provide the dual second-order nec- essary optimality condition for the local weak Pareto minimum of the vector optimization problem through the Clarke generalized derivatives and the Páles-Zeidan type second- order upper generalized directional derivatives. The result obtained in the literature is new and also illustrated by an example for our findings.

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẦN CHO CỰC TIỂU PARETO YẾU ĐỊA PHƯƠNG CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTƠ CÓ RÀNG BUỘC

Vũ Thị Thu Loan[1], **Trần Văn Sự**[2], **Đinh Diệu Hằng**[3*]
[1]*Trường Đại học Nông Lâm – ĐH Thái Nguyên*
[2]*Trường Đại học Quảng Nam*
[3]*Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên*

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 16/4/2021
Ngày hoàn thiện: 27/5/2021
Ngày đăng: 31/5/2021

TỪ KHÓA

Điều kiện cần tối ưu cấp hai
Cực tiểu Pareto yếu địa phương
Đạo hàm suy rộng Clarke
Điều kiện tối ưu
Đạo hàm theo hướng suy rộng trên cấp hai Páles-Zeidan

TÓM TẮT

Bài toán tối ưu với ràng buộc tập và bất đẳng thức (hay còn gọi là bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc) được nghiên cúu trong bài báo này với dữ liệu trong không gian Banach thực. Sử dụng điều kiện chính quy trong trường hợp đạo hàm Clarke trong đó hàm ràng buộc và hàm mục tiêu là khả vi Gâteaux tại điểm tối ưu cho trước, chúng tôi thiết lập điều kiên tối ưu cần cấp hai dạng đối ngẫu cho cực tiểu Pareto yếu địa phương của bài toán tối ưu thông qua ngôn ngữ đạo hàm suy rộng Clarke và đạo hàm theo hướng suy rộng trên cấp hai dạng Páles-Zeidan. Kết quả thu được trong bài báo là mới và chúng tôi cũng đề xuất một số ví dụ cho mô tả kết quả mới của bài báo.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.4319

* Corresponding author. *Email: ddhang@ictu.edu.vn*

1. Mở đầu

Giả sử X là một không gian Banach, C là một tập con mở khác rỗng trong X, hàm giá trị vectơ $f=(f_1,...,f_p):C\to R^p$ và các hàm giá trị thực $g_i:C\to R, i=1,2,...,m$. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tối ưu vectơ với ràng buộc tập và bất đẳng thức dạng:

$\min f(x)$ (hay $f(x)\to\min$) (p) thỏa mãn $x\in K$

Trong đó, tập chấp nhận được K của bài toán tối ưu vectơ (P) có dạng:

$$K:=\{x\in C: g_i(x)\le 0, i=1,2,...,m\}.$$

Một vectơ $\bar{x}\in K$ được gọi là cực tiểu Pareto yếu địa phương của bài toán tối ưu vectơ (P), nếu tồn tại một lân cận $\min f(x)\ U$ của $\bar{x}$ sao cho không tồn tại bất kỳ $x\in K\cap U$ để

$$f_i(x)<f_j(\bar{x}), j=1,2,...,p.$$

Trường hợp $U=X$, từ "địa phương" có thể bỏ qua cho nghiệm cực tiểu Pareto yếu.

Nếu một vectơ $\bar{x}\in K$ là một cực tiểu Pareto yếu của bài toán tối ưu vectơ (P) thì cũng là một cực tiểu Pareto yếu địa phương của bài toán. Do đó, trong nhiều bài toán tối ưu, tính chất nghiệm địa phương được ưu tiên trong thiết lập tính hữu hiệu "cần" cấp 1 và cấp 2.

Bài toán tối ưu vectơ (P) với điều kiện Lipschitz địa phương được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây, nhưng giả thiết về hàm mục tiêu và ràng buộc ít nhất là khả vi liên tục. Trong nhiều kết quả về lĩnh vực điều kiện tối ưu cấp 2 tốt hơn cấp 1, nghĩa là điều kiện tối ưu cấp 2 chứa nhiều thông tin hơn điêu kiện tối ưu cấp 1, chúng còn làm mịn được các thông tin trong điều kiên tối ưu cấp 1. Trong nhiêu bài toán tối ưu vectơ, các điều kiện tối ưu cấp 1 không thể sử dụng cho kiểm tra kết quả tối ưu hay thiết kế thuật toán số trong thực hành mà cần đến điều kiện tối ưu cấp 2. Đấy là lý do chính tại sao chúng tôi cần nghiên cứu điều kiện tối ưu cấp 2 trong bài báo này. Để bạn đọc có một góc nhìn toàn diện hơn về các điều kiện tối ưu cấp 2 đã biết, chúng tôi giới thiệu một vài vấn đề mang tính lịch sử đã được đề cập trong các bài báo uy tín như sau: Năm 1999, Bonnans-Cominetti-Shapiro [1] sử dụng đạo hàm parabolic cấp 2 để thiết lập điều kiện cần tối ưu vectơ có ràng buộc; năm 2003, Guerraggio-Luc [2] nghiên cứu điều kiện tối ưu cấp 2 cho bài toán tối ưu đa mục tiêu vectơ với dữ liệu trong lớp $C^{0,1}$ và $C^{1,1}$, và cũng trong thời điểm này, Jiménez-Novo [3]-[5] thu được điều kiện tối ưu cấp 2 cho bài toán tối ưu vectơ với dữ liệu là các hàm khả vi được mô tả thông qua các tập tiếp liên cấp 2. Kế tiếp đến năm 2010, Gutiérrez-Jiménez-Novo [6] sử dụng các tập tiếp tuyến cấp 2 thiết lập điều kiện tối ưu cấp 2 cho bài toán tối đa mục tiêu có ràng buộc; năm 2018, Luu [7] biểu diễn điều kiện tối ưu cấp 2 dạng cơ bản và đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc sử dụng đạo hàm theo hướng cấp 2 dạng Páles-Zeidan. Gần đây nhất vào năm 2020, Constantin [8] cung cấp điều kiện tối ưu cấp 2 dạng cơ bản theo đạo hàm suy rộng Clarke và đạo hàm theo hướng cấp 2 dạng Páles-Zeidan.

Nối tiếp kết quả của Constantin [8], chúng tôi cung cấp trong bài báo này điều kiện tối ưu cần cấp 2 dạng đối ngẫu cho cực tiểu Pareto yếu địa phương trong không gian Banach với dữ liệu bài toán Lipschitz địa phương tại thời điểm tối ưu cho trước. Ngoài ra, chúng tôi cũng đề xuất một số ví dụ mô tả kết quả mới của bài báo.

2. Kiến thức chuẩn bị

Trong bài báo này chúng tôi quy ước:

$$0\times(-\infty)=0 \text{ và } 0\times\infty=0,$$

Với mỗi số tự nhiên n, ký hiệu I_n là tập n số tự nhiên đầu tiên bắt đầu từ 1. Phần trong topo và bao đóng poto của một tập con A trong X được ký hiệu tương ứng bởi $convA$ và riA. Số phần tử của tập A được mô tả như $|A|$.

Định nghĩa sau đóng vai trò then chốt trong bài báo, bạn đọc có thể thấy trong Clarke [9], V. I. Ivanov [10] and Constantin [8].

Định nghĩa 2.1 Cho f là một hàm giá trị thực Lipschitz địa phương trên một tập mở C của X và $x_0 \in X$. Ta có các định nghĩa sau:

(a) Đạo hàm suy rộng Clarke của f tại x_0 được xác định bởi:

$$f^0(x_0,v) := \limsup_{(x,t)\to(x_0,0^+)} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

(b) Đạo hàm theo hướng suy rộng trên cấp hai kiểu Páles-Zeidan của f tại x_0 được xác định bởi:

$$f^{00}(x_0,v) := \limsup_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)-tf(x_0;v)}{\frac{t^2}{2}}, v\in X$$

Chú ý 2.2 Theo Clarke [9], nếu X là hữu hạn chiều, f là Lipschitz địa phương xung quanh x_0, chính quy trong trường hợp của Clarke và khả vi Gâteaux tại x_0 của f được ký hiệu bởi $f^G(x_0)(v), (v\in X),$ thì chúng ta luôn có đẳng thức đúng:

$$f^0(x_0,v) := f^G(x_0)(v), v\in X$$

Đặc biệt, nếu f là khả vi Fréchet và liên tục xung quanh x_0 và khả vi theo hướng cấp 2 tại x_0 theo hướng $v\in X$, ta cũng thu được:

$$f^{00}(x_0,v) = f^G(x_0)(v), v\in X$$

Ở đây

$$f^{'''}(x_0,v) := \limsup_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)-t\nabla f(x_0;v)}{\frac{t^2}{2}}$$

và $\nabla f(x_0)$ là đạo hàm Fréchet tại x_0 của hàm f.

Với mỗi $\bar{x}\in K$ (điểm chấp nhận được), tập chỉ số hoạt của bài toán tối ưu vectơ (P) ký hiệu $I(\bar{x}) := \{i\in I_m : g_i(\bar{x})=0\}$

Khi đề cập đến dữ liệu của bài toán (P), luôn giả thiết rằng các hàm $f_1,..., f_p$ và $g_i\left(i\in I(\bar{x})\right)$ Lipschitz địa phương trên tập mở khác rỗng $C\subset X$, các hàm $g_i\left(i\in I_m \setminus I(\bar{x})\right)$ liên tục tại điểm chấp nhận được $\bar{x}$.

Một phương $v\in X$ được gọi là trọng tâm tại điểm $\bar{x}$ nếu:

$$\begin{cases} f_j^0(\bar{x};v)\le 0, j\in I_P \\ g_i^0(\bar{x};v)\le 0, i\in I(\bar{x}). \end{cases}$$

Với trọng tâm v, ký hiệu:

$$J(\bar{x};v)=\{j\in I_p : f_j^0(\bar{x};v)=0\},$$

$$I\left(\bar{x};v\right)=\left\{i \in I\left(\bar{x}\right): f_i^0\left(\bar{x};v\right)=0\right\}$$

Chuẩn hóa ràng buộc cấp 2 dạng Zingwill ký hiệu (ZSCQ) được thỏa mãn nếu:

$$B\left(\bar{x};v\right)\subseteq \overline{A\left(\bar{x};v\right)},$$

Trong đó:

$$A\left(\bar{x};v\right):=\Big\{w \in X : \forall i \in I\left(\bar{x};v\right) \exists \varepsilon_i > 0 :$$
$$g_i\left(\bar{x}+tv+\frac{1}{2}t^2 w\right) \le 0, \forall t \in (0;\varepsilon_i)\Big\}$$
$$B\left(\bar{x};v\right):=\left\{w \in X : g_i^0\left(\bar{x};w\right)+g_i^{00}\left(\bar{x};v\right)\le 0,\ \forall i \in I\left(\bar{x};v\right)\right\}$$

Định lý 2.3 (xem Constantin [8]) Giả sử $\bar{x} \in K$ là một cực tiểu Parteto yếu địa phương của (P). Khi đó, với mọi hướng trọng tâm $v \in X$ thỏa mãn (ZSCQ), hệ sau không có nghiệm $w \in X$

$$\begin{cases} f_j^0\left(\bar{x};w\right)+f_j^{00}\left(\bar{x};v\right)<0,\ j \in J\left(\bar{x};v\right), \\ g_i^0\left(\bar{x};w\right)+g_i^{00}\left(\bar{x};v\right)\le 0, i \in I\left(\bar{x};v\right). \end{cases}$$

3. Kết quả mới của bài báo

Xét bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức (P) được xác định trong phần 2. Một điều kiện tối ưu cần cấp 2 dạng đối ngẫu cực tiểu Pareto yếu địa phương của bài toán (P) theo ngôn ngữ đạo hàm suy rộng Clarke và đạo hàm theo hướng suy rộng trên cấp 2 được thiết lập như sau:

Định lý 3.1. (Điều kiện tối ưu cấp 2 cho $\bar{x} \in K$ là một cực tiểu yếu địa phương dạng đối ngẫu) Cho $\bar{x} \in K$ là một cực tiểu Pareto yếu địa phương của bài toán (P). Giả sử X hữu hạn chiều, các hàm mục tiêu và các ràng buộc hàm $f_1,..., f_p$ và $g_i\left(i \in I(\bar{x})\right)$ chính quy trong trường hợp của Clarke và khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$. Khi đó, với mọi hướng trọng tâm $v \in X$ thỏa mãn (ZSCQ), tồn tại $\lambda_j \ge 0\left(j \in J\left(\bar{x};v\right)\right)$ và không đồng thời bằng 0 sao cho với mọi $w \in X$,

$$\sum_{j\in J\left(\bar{x};v\right)} \lambda_i f_j^G\left(\bar{x}\right)\!\left(w\right)+\sum_{i\in I\left(\bar{x};v\right)} \mu_i g_i^G\left(\bar{x}\right)\!\left(w\right)\ge 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in J\left(\bar{x};v\right)} \lambda_i f_j^{00}\left(\bar{x}\right)\!\left(w\right)+\sum_{i\in I\left(\bar{x};v\right)} \mu_i g_i^{00}\left(\bar{x}\right)\!\left(w\right)\ge 0, \tag{2}$$

$$\mu_i g_i\left(\bar{x}\right)=0, \forall i \in I_m. \tag{3}$$

Chứng minh. Giả sử tất cả các giả thiết của định lý 3.1 được thỏa mãn. Do X hữu hạn chiều, các ánh xạ hàm $f_1,..., f_p$ và $g_i\left(i \in I(\bar{x})\right)$ chính quy trong trường hợp của Clarke và khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$, chúng ta suy ra các đẳng thức sau đúng:

$$f_j^0\left(\bar{x};v\right)=f_j^G\left(\bar{x}\right)\!\left(v\right),\ j \in J\left(\bar{x};v\right)$$
$$g_i^0\left(\bar{x};v\right)=g_i^G\left(\bar{x}\right)\!\left(v\right),\ i \in I\left(\bar{x};v\right).$$

Xét tập:

$$L:=\prod_{j\in J\left(\bar{x};v\right)} f_j^G\left(\bar{x}\right)\!\left(X\right)\times \prod_{i\in I\left(\bar{x};v\right)} g_i^G\left(\bar{x}\right)\!\left(X\right)$$

$$L:=\prod_{j\in J\left(\bar{x};v\right)} f_j^G\left(\bar{x}\right)\!\left(X\right)\times \prod_{i\in I\left(\bar{x};v\right)} g_i^G\left(\bar{x}\right)\!\left(X\right)=\prod_{j\in J\left(\bar{x};v\right)}\left\{f_j^G\left(\bar{x}\right)\!\left(w\right): w \in X\right\}\times \prod_{i\in I\left(\bar{x};v\right)}\left\{g_i^G\left(\bar{x}\right)\!\left(w\right): w \in X\right\}$$

mà phần trong tương đối của L không chứa vectơ l, ở đây

Xét tập

$$L := \prod_{j\in J(\bar{x};v)} f_j^G(\bar{x})(X) \times \prod_{i\in I(\bar{x};v)} g_i^G(\bar{x})(X)$$
$$= \prod_{j\in J(\bar{x};v)} \left\{ f_j^G(\bar{x})(w) : w\in X \right\}$$
$$\times \prod_{i\in I(\bar{x};v)} \left\{ g_i^G(\bar{x})(w) : w\in X \right\}$$

mà phần trong tương đối của L không chứa vectơ l, ở đây

$$l := \Big(-f_1^{00}(\bar{x};v), \ldots, -f_{|J(\bar{x};v)|}^{00}(\bar{x};v),$$
$$-g_1^{00}(\bar{x};v), \ldots, -g_{|I(\bar{x};v)|}^{00}(\bar{x};v) \Big).$$

Sở dĩ ta có kết quả như trên là do X hữu hạn chiều, tập L là một nón lồi và theo giả thiết rằng hướng trọng tâm $v\in X$ thỏa mãn (ZSCQ), theo Định lý 2.3, L không chứa vectơ l và ngoài ra phần trong tương đối của L cũng là tập khác rỗng. Sử dụng định lý tách một điểm và tập là phần trong tương đối rời nhau (xem Rock-afellar [11]), tồn tại $\lambda_j \geq 0 \left(j\in J(\bar{x};v) \right)$ và $\mu_i \geq 0 \left(i\in I(\bar{x};v) \right)$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$\sum_{j\in J(\bar{x};v)} \lambda_i f_j^G(\bar{x})(w_1) + \sum_{i\in I(\bar{x};v)} \mu_i g_i^G(\bar{x})(w_2) \geq 0$$

với mọi $w_1, w_2 \in X$ và

$$\sum_{j\in J(\bar{x};v)} \lambda_i f_j^{00}(\bar{x};v) + \sum_{i\in I(\bar{x};v)} \mu_i g_i^{00}(\bar{x};v) \geq 0$$

Do đó, các điều kiện (1)-(2) đúng. Đặt $\mu_i = 0$ trong trường hợp $i\in I_m \setminus I(\bar{x};v)$, nhận được kết quả (3).

Định lý được chứng minh.

Trong trường hợp các hàm mục tiêu và ràng buộc của bài toán (P) khả vi Fréchet, liên tục xung quanh điểm tối ưu và khả vi theo hướng cấp 2 tại điểm đó theo hướng trọng tâm $v\in X$, chúng tôi thiết lập điều kiện cần tối ưu cấp 2 dạng đối ngẫu cho cực tiểu Pareto yếu địa phương theo đạo hàm theo hướng cấp 2 qua Định lý sau:

Định lý 3.2. (**Điều kiện cần tối ưu cấp 2 dạng đối ngẫu cho cực tiểu Pareto yếu địa phương theo đạo hàm theo phương cấp 2**) Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 được thỏa mãn, các hàm mục tiêu và ràng buộc $f_1, \ldots, f_p$ và $g_i \left(i\in I(\bar{x}) \right)$ của bài toán (P) khả vi Fréchet, liên tục xung quanh $\bar{x}$, và khả vi theo hướng cấp 2 tại điểm đó theo hướng trọng tâm $v\in X$ thỏa mãn (ZSCQ), tồn tại $\lambda_j \geq 0 \left(j\in J(\bar{x};v) \right)$ và $\mu_i \geq 0 \left(i\in I_m \right)$ không đồng thời bằng 0 sao cho với mọi $w\in X$,

$$\sum_{j\in J(\bar{x};v)} \lambda_j f_j^G(\bar{x})(w) + \sum_{i\in I(\bar{x};v)} \mu_i g_i^G(\bar{x})(w) \geq 0, \tag{4}$$

$$\sum_{j\in J(\bar{x};v)} \lambda_j f_j^n(\bar{x};v) + \sum_{i\in I(\bar{x};v)} \mu_i g_i^n(\bar{x};v) \geq 0, \tag{5}$$

$$\mu_i g_i(\bar{x}) = 0, \forall i\in I_m. \tag{6}$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.1, tồn tại $\lambda_j \geq 0\left(j \in J\left(\bar{x};v\right)\right)$ và $\mu_i \geq 0\left(i \in I_m\right)$ không đồng thời bằng 0 sao cho với mọi $w \in X$, các điều kiện (1), (2) và (3) được nghiệm đúng. Sử dụng giả thiết ban đầu cùng với Chú ý 2.2, ta có:

$$f_j^{''}\left(\bar{x};v\right) = f_j^{00}\left(\bar{x};v\right) \quad \forall j \in J\left(\bar{x};v\right),$$
$$g_i^{''}\left(\bar{x};v\right) = g_i^{00}\left(\bar{x};v\right) \quad \forall i \in I\left(\bar{x};v\right).$$

Vậy các điều kiện (4), (5) và (6) cũng được thỏa mãn.

Định lý được chứng minh.

Chú ý nếu chúng ta đổi tính khả vi Gâteaux tại điểm bằng tính khả vi Fréchet trong một lân cận điểm $\bar{x}$, dễ dàng kiểm tra được kết quả thu được trong Định lý 3.1 và Định lý 3.2 vẫn còn đúng nếu thay bất đẳng thức cũ:

$$\sum_{j \in J\left(\bar{x};v\right)} \lambda_j f_j^G\left(\bar{x}\right)\left(w\right) + \sum_{i \in I\left(\bar{x};v\right)} \mu_i g_i^G\left(\bar{x}\right)\left(w\right) \geq 0,$$

bằng bất đẳng thức mới:

$$\sum_{j \in J\left(\bar{x};v\right)} \lambda_j \nabla f_j\left(\bar{x}\right)\left(w\right) + \sum_{i \in I\left(\bar{x};v\right)} \mu_i \nabla g_i\left(\bar{x}\right)\left(w\right) \geq 0,$$

Chúng tôi minh họa Định lý qua ví dụ sau:

Ví dụ 3.3. Xét bài toán (P), trong đó $p=2$, $m=1$, $C=R^2$ và $\bar{x}=(0,0)$. Khi đó, $f=\left(f_1, f_2\right): R^2 \to R^2$ và $g=g_1: R^2 \to R$, ở đây, với mọi $x=(x_1,x_2) \in R^2$,

$$f_1(x) := (x_1 - x_2)^2 + x_1^4 + 1,$$
$$f_2(x) := -x_1^2 - x_2^2 + x_2^6,$$
$$g_1(x) := x_1 - x_2 - x_1^4.$$

Tập chấp nhận được của bài toán (P) có dạng $K=\left\{x \in R^2 : x_1 \leq x_2 + x_1^4\right\}$. Dễ thấy $\bar{x}$ là một cực tiểu Pareto yếu địa phương của bài toán (P) vì $f_1(x) \geq f_2(x)$ với mọi $x \in R^2$ và các hàm f_1, f_2, g_1 thỏa mãn các giả thiết của Định lý 3.1 và Định lý 3.2. Chọn hướng trọng tâm v thỏa mãn $v=(0,v_2) \in R \times R_+$. Ta có $I\left(\bar{x}\right)=\left\{1\right\}$, $J\left(\bar{x};v\right)=\left\{1,2\right\}$,. Dễ thấy chuẩn hóa ràng buộc dạng Zing-will (ZSCQ) thỏa mãn. Theo Định lý 3.1 và Định lý 3.2, tồn tại $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ và $\mu_1 \geq 0$ với $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$ sao cho các điều kiện (1), (2) và (3) (hoặc các điều kiện (4), (5) và (6)) đúng. Thật vậy, trong cách thiết lập ta có vế trái của (1) (hoặc (4)) bằng 0, trong khi với $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$ và $\mu_1 = 0$, ta có vế phải của (2) (hoặc (5)) bằng $v_2^2 \geq 0$ và hiển nhiên (3) được thỏa mãn.

4. Kết luận

Dựa vào điều kiện cần tối ưu cấp 2 được biểu diễn ở dạng cơ bản cho cực tiểu Pareto yếu địa phương trong bài báo của Constantin [8], chúng tôi đã thiết lập được một số điều kiện cần tối ưu cấp 2 dạng đối ngẫu cho cực tiểu Pareto yếu địa phương của bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức thông qua ngôn ngữ đạo hàm suy rộng Clarke và đạo hàm theo hướng suy rộng trên cấp 2 dạng Pasles-Zeidan trong không gian Banach. Kết quả nhận được có thể mô tả trong trường hợp các hàm mục tiêu và ràng buộc của bài toán (P) là khả vi Fréchet và liên tục xung quanh điểm tối ưu và khả vi theo hướng cấp 2 tại điểm đó theo hướng trọng tâm $v \in X$, hoặc trong trường hợp các hàm này khả vi liên tục Fréchet trong một lân cận điểm $\bar{x}$. Kết quả đạt được trong bài báo có thể được áp dụng để xây dựng các thuật toán cho bài toán tối ưu vectơ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] J.-F. Bonnans, R. Cominetti, and A. Shapiro, "Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets," *SIAM J. Optim.*, vol. 9, no. 2, pp. 466-492, 1999.

[2] A. Guerraggio and D. T. Luc, "Optimality conditions for *C*1*;*1 constrained multiobjective problems," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 116, pp. 117-129, 2003.

[3] B. Jiménez and V. Novo, "First and second order sufficient conditions for strict minimality in nonsmooth vector optimization," *J.Math. Anal. Appl.*, vol. 284, pp. 496-510, 2003.

[4] B. Jiménez and V. Novo, "Second order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization," *Math. Meth.Oper. Res.*, vol. 58, pp. 299-317, 2003.

[5] B. Jiménez and V. Novo, "Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets," *Math. Meth. Oper. Res.*, vol. 9, pp. 123-144, 2004.

[6] C. Gutierrez, B. Jiménez, and V. Novo, "On second-order Fritz John type optimality conditions in nonsmooth multiobjective programming," *Math. Program., Ser. B,* vol. 123, pp. 199-223, 2010.

[7] V. L. Do, "Second-order necessary efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems," *J. Glob. Optim.,* vol. 70, pp. 437- 453, 2018.

[8] E. Constantin, "Second-order optimality conditions in locally Lipschitz inequalityconstrained multiobjective optimization," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 186, pp. 50-67, 2020.

[9] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New York, 1983.

[10] V. I. Ivanov, "Second-order optimality conditions for vector problems with continuously Fréchet differentiable data and secondorder constraint qualifications," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 166, pp. 777-790, 2015.

[11] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, 1970.