MỘT SỐ THỂ HIỆN ĐƯỜNG THẲNG Ơ-LE TRONG CHƯƠNG TRÌNH TOÁN PHỔ THÔNG

Trần Văn Kịch

Trung tâm Thực hành - Thí nghiệm, Trường Đại học Đồng Tháp

Tác giả liên hệ: tvkich@dthu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 08/02/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 31/03/2021; Duyệt đăng: 22/04/2021

Tóm tắt

Trong bài viết, chúng tôi giới thiệu cách thể hiện đường thẳng Ơ-le trong tam giác theo trình tự kiến thức thuộc chương trình toán phổ thông hiện hành. Trên cơ sở chọn lọc một số nội dung kiến thức từ các nguồn tài liệu tham khảo, chúng tôi tinh chỉnh, bổ sung nội dung kiến thức sao cho phù hợp với từng đối tượng học sinh theo từng khối lớp từ lớp 6 đến lớp 12. Qua đó, chúng tôi đề xuất và giải chi tiết một số bài toán nâng cao liên quan về một số cách chứng minh ba điểm thẳng hàng. Kết quả đạt được của bài viết giúp học sinh có cách nhìn tổng quan về chủ đề đường thẳng Ơ-le thông qua nhiều cách tiếp cận khác nhau của toán học.

Từ khóa: *Ba điểm thẳng hàng, đường thẳng Ơ-le.*

SOME DEMONSTRATIONS OF THE EULER LINE IN THE MATHEMATICS CURRICULUM OF GENERAL EDUCATION

Tran Van Kich

Center for Practices and Experiments, Dong Thap University

Corresponding author: tvkich@dthu.edu.vn

Article history

Received: 08/02/2021; Received in revised form: 31/03/2021; Accepted: 22/04/2021

Abstract

In this paper, we introduce ways to demonstrate the Euler line in a triangle, subject to the sequence of mathematics knowledge designed in the current Mathematics curriculum of general education. Drawing on different sources of reference, we refine and supplement the existing contents so as to suit each grade level from the 6th to the 12th. Thereby, we proposed some advanced problems and their detailed solutions related to some ways of proving the three collinearity points. The obtained results help students have an overview of the Euler line with several different approaches.

Keywords: *Three collinear points, Euler line.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.10.3.2021.863

Trích dẫn: Trần Văn Kịch. (2021). Một số thể hiện đường thẳng Ơ-le trong chương trình toán phổ thông. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 10*(3), 13-20.

1. Đặt vấn đề

Đường thẳng Ơ-le trong tam giác là đường thẳng đi qua ba điểm: Trực tâm, Trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác. Đường thẳng này mang tên nhà toán học Euler (1707-1783) và đã được công bố vào năm 1765 (Wikipedia, 2020). Đường thẳng Ơ-le liên quan đến 3 điểm thẳng hàng là chủ đề quan trọng của nghiên cứu toán học. Vậy học sinh phổ thông đã được truyền tải và tiếp cận được kiến thức này như thế nào?

Chương trình toán phổ thông hiện nay, chúng ta chưa tìm thấy có bài học riêng để giảng dạy đường thẳng Ơ-le cho học sinh. Học sinh chỉ tiếp cận kiến thức này dưới hình thức giới thiệu thông qua các bài đọc thêm hoặc dưới hình thức tích hợp được lồng ghép trong các thí dụ, hay các dạng bài tập đề nghị trong sách giáo khoa môn toán phổ thông. Riêng các tài liệu tham khảo khác như tài liệu tham khảo chuyên sâu, chuyên đề môn toán trung học cơ sở, trung học phổ thông (Nguyễn Đức Tấn, 2015 và Phan Huy Khải, 2011) và trên mạng Internet (Nguyễn Hùng, 2020) có trình bày các cách chứng minh đường thẳng Ơ-le. Nhưng nhìn chung, việc trình bày giới thiệu đường thẳng Ơ-le đối với học sinh phổ thông là rời rạc qua nhiều tài liệu, kiến thức phân tán qua nhiều khối lớp. Điều này làm cho học sinh khi tiếp cận kiến thức này gặp phải nhiều khó khăn.

Bài viết này, trên cơ sở chọn lọc, sắp xếp, tinh chỉnh và bổ sung một số nội dung kiến thức trong các cách chứng minh định lý Ơ-le từ các nguồn tài liệu nhằm để trình bày một cách có hệ thống các cách thể hiện đường thẳng Ơ-le phù hợp với trình độ và kiến thức của học sinh theo từng khối lớp phổ thông một cách liên tục, có thứ tự từ lớp 6 đến lớp 12. Với mong muốn phục vụ được một phổ rộng các đối tượng học sinh nghiên cứu, tìm hiểu kiến thức một cách dễ dàng hơn. Đặc biệt đối với học sinh cuối cấp trung học phổ thông có thể tự thống kê để biết được các cách thể hiện đường thẳng Ơ-le thông qua nhiều hình thức và nhiều nội dung học khác nhau như: Hình học phẳng, Hình học tọa độ, Đại số véc tơ, Phép biến hình và trên tập số phức…

2. Thể hiện đường thẳng Ơ-le đối với học sinh phổ thông

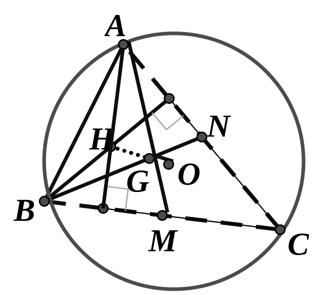
2.1. Học sinh lớp 6

Học sinh lớp 6 mới bắt đầu làm quen với các kiến thức cơ bản của môn Hình học. Trên cơ sở ứng dụng kết quả của đường thẳng Ơ-le, chúng tôi đề xuất bài toán thể hiện quy trình dựng hình sau đây nhằm giúp các em rèn luyện các kỹ năng dựng trung điểm của một đoạn thẳng và cách dựng góc vuông chính xác. Đồng thời qua đó phát hiện được kết quả về tính thẳng hàng của ba điểm H,G,O cụ thể:

Bài toán 1: Đề nghị học sinh thực hiện theo thứ tự các bước sau:

Bước 1: Dựng đường tròn có tâm O, bán kính R tuỳ ý.

Bước 2: Chọn 3 điểm A, B, C trên đường tròn tâm O sao cho $AB < BC < CA$ (tam giác ABC là tam giác thường).



Hình 1

Bước 3: Dựng M, N lần lượt là trung điểm hai đoạn BC, AC.

Bước 4: Nối hai điểm A, M và hai điểm B, N. Gọi G là giao điểm của AM và BN.

Bước 5: Dựng đường thẳng d_1 qua A vuông góc BC.

Bước 6: Dựng đường thẳng d_2 qua B vuông góc AC.

Bước 7: Dựng giao điểm H của d_1 và d_2.

Bước 8: Nối 3 điểm H, G, O.

Bước 9: Ghi nhận xét: H, G, O có thẳng hàng không?

Sau khi thực hiện qui trình trên, giáo viên thu được kết quả như sau:

1/ Giáo viên phân hoá được hoc sinh theo 2 nhóm:

Nhóm 1: Gồm những học sinh có 3 điểm $H,\ G,\ O$ thẳng hàng (nhóm có kỹ năng tốt).

Nhóm 2: Gồm những học sinh có 3 điểm $H,\ G,\ O$ không thẳng hàng. (GV yêu cầu nhóm thực hành lại việc xác định các trung điểm của đoạn thẳng và cách dựng góc vuông chính xác…).

2/ Giáo viên giới thiệu cho học sinh tiếp cận được tri thức mới:

Thông qua Bài toán 1 mà các em vừa giải quyết xong: *"Ba điểm H, G, O tạo nên một đường thẳng. Đường thẳng này gọi là đường thẳng Ơ-le mang tên nhà toán học lỗi lạc Euler (1707-1783) đã tìm ra vào năm 1765"* (Wikipedia, 2020).

2.2. Học sinh lớp 7

Học sinh lớp 7 được giới thiệu đường thẳng Ơ-le qua đoạn trích như sau:

*"**Có thể em chưa biết:** Trong một tam giác, nếu gọi O là điểm chung của ba đường trung trực (tâm đường tròn ngoại tiếp), G là điểm chung ba đường trung tuyến (trọng tâm), H là điểm chung ba đường cao (trực tâm), thì O, G, H cùng thuộc đường thẳng. (G ở giữa O, H và OH=3OG). Đường thẳng chứa O, G, H gọi là đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC; nó mang tên nhà toán học lỗi lạc Lê-ô-na Ơ-le (1707-1783)"* (Phan Đức Chính và Tôn Thân, 2003, tr. 84]).

Chúng ta có thể cho các em tiếp cận đường thẳng Ơ-le nói trên thông qua cách giải bài toán nhờ áp dụng tính chất hai góc đối đỉnh, và các trường hợp bằng nhau của hai tam giác như sau:

Cách giải 1 (Nguyễn Đức Tấn, 2015)

Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Do G là trọng tâm nên $G \in AM;\ AG = 2GM.$

Trên tia đối của tia OA lấy điểm D sao cho $OD = OA.$

Ta có $OA = OC = OD \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại $O \Rightarrow OAC = OCA$.

Tương tự ΔODC cân tại O

$\Rightarrow ODC = OCD.$

Trong tam giác ADC:

$DAC + ADC + ACD = 180^0.$

$(OCA + OCD) + ACD = 180^0$

$\Rightarrow 2ACD = 180^0.$

$\Rightarrow ACD = 90^0 \Rightarrow DC \perp AC.$

Ta có $BH \perp AC$ (H là Trực tâm tam giác ABC), nên $BH \parallel DC.$

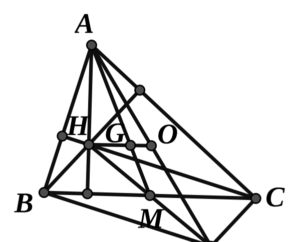
Tương tự chứng minh được: $BD \parallel CH.$

$\Delta BHC = \Delta CDB\ (g.c.g)$

do đó $BH = CD.$

$\Delta MBH = \Delta MCD\ (g.c.g)$

$\Rightarrow HMB = DMC$



Hình 2

và M, H, D thẳng hàng.

Từ $MH = MD$ nên M là trung điểm $HD.$

Vậy AM và HO là 2 trung tuyến của tam giác $AHD.$

Suy ra $\Rightarrow HO \cap AM = G$ (G là trọng tâm tam giác ABC).

Vậy H, O qua G và $HG = 2GO$ (điều phải chứng minh).

2.3. Học sinh lớp 8

Đối với học sinh lớp 8, Chúng ta có thể cho học sinh tiếp cận đường thẳng Ơ-le thông qua cách giải bài toán nêu trên nhờ áp dụng hai tam giác đồng dạng như sau:

Cách giải 2 (Nguyễn Hùng, 2011)

Các điểm $M,\ N$ lần lượt là trung điểm BC và AC.

$\Delta AHB \simeq \Delta MON$ (g. g. g) $\Rightarrow \dfrac{OM}{HA} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\dfrac{OM}{HA} = \dfrac{GM}{GA} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác: $HAG = GMO$ (so le trong) nên $\Delta GOM \simeq \Delta GHA \Rightarrow OGM = HGA$.

Do $HGM + HGA = 180^0 \Rightarrow HGM + MGO = 180^0$

$\Rightarrow HGM;\ MGO$ là hai góc kề bù. Vậy $H,\ G,\ O$ thẳng hàng; và $\dfrac{GO}{HG} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow HG = 2GO$.

2.4. Học sinh lớp 9

Học sinh lớp 9, Chúng ta có thể cho học sinh tiếp cận đường thẳng Ơ-le thông qua cách giải bài toán nêu trên nhờ tính chất của hình bình hành như sau:

Cách giải 3 (Wikipedia, 2020)

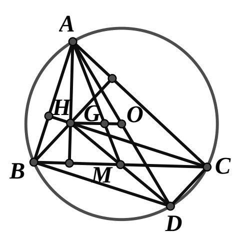
Gọi D là điểm xuyên tâm đối của A (hình vẽ).

Ta có

$DCA = 90^0$

$DBA = 90^0$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).



Hình 4

Tứ giác $BHCD$ có $BH \parallel CD$ (cùng vuông góc với AC).

$DB \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB).

Do đó tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Suy ra $H; M; D$ thẳng hàng và $MH = HD$.

Ta có $OA = OD$. Suy ra OM là đường trung bình tam giác.

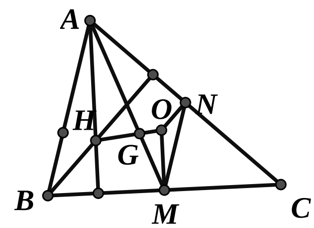
Do đó $OM = \dfrac{1}{2}AH$ (1), $GM = \dfrac{1}{2}AG$

(G trọng tâm) (2),

$HAG = GMO$ (so le trong) (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \Delta HAG \simeq \Delta OMG$

$\Rightarrow HGA = OMG$ (hai góc tương ứng).



Hình 3

Do A, G, M thẳng hàng nên suy ra $H,\ G,\ O$ thẳng hàng (tính chất hai góc đối đỉnh).

Do đó $HG = 2GO$ (điều phải chứng minh).

2.5. Học sinh lớp 10.

Học sinh lớp 10 tiếp cận đường thẳng Ơ-le thông qua bài toán 2 (TrầnVăn Hạo và Nguyễn Mộng Hy, 2007, tr. 21) như sau:

"*Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O*

a/ Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b/ Chứng minh $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

c/ Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng".

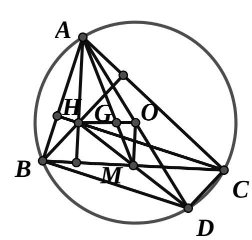
Cách giải 4

a/ Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

$BH \parallel DC$ (cùng vuông góc với AC).

$BD \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB).

Vậy $BDCH$ là hình bình hành.



Hình 5

Do đó M là trung điểm của HD

nên $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$

b/ Ta có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}.$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$ (1).

c/ Ta biết $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$ Suy ra ba điểm O, G, H thẳng hàng (đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC).

Sau đây chúng tôi đưa ra bài toán nâng cao nhằm để minh họa tính đúng đắn của định lý Ơ-le một cách cụ thể, đồng thời rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải bài toán bằng phương pháp tọa độ như sau:

Bài toán 3: Cho tam giác ABC với A 2;0 , B 2;4 , C 4;0 .

a/ Viết phương trình các đường trung trực của tam giác. Xác định toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$

b/ Viết phương trình các đường cao. Từ đó suy ra toạ độ trực tâm H của tam giác $ABC.$

c/ Chứng tỏ H, I, G thẳng hàng, ở đó G là trọng tâm tam giác $ABC.$

Cách giải 5

a/ Phương trình ba đường trung trực d_1, d_2, d_3 của tam giác có phương trình lần lượt là:

d_1 $: x + y - 2 = 0,$ d_2 $: x - 2y + 1 = 0.$

d_3 $: x - 1 = 0$

Tâm I là giao d_1 và d_2 , ta được I 1;1 .

b/ Phương trình 3 đường cao:

h_1 $: x - 2y + 2 = 0,$ h_2 $: x - 2 = 0,$

h_3 $: x + y - 4 = 0.$

Suy ra Trực tâm: $h_1 \cap h_2 = H$ 2;2 .

c/ Ta có tọa độ trọng tâm:

$$G\left(\frac{-2+2+4}{3};\frac{0+4+0}{3}\right) = G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Từ I 1;1 , H 2;2 , $G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right).$

Suy ra H, I, G đều thuộc đường thẳng có phương trình $y = x$ (là đường thẳng Ơ-le)

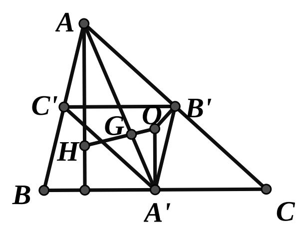
$$\overrightarrow{HG} = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), \overrightarrow{GI} = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \Rightarrow HG = 2GI.$$

2.6. Học sinh lớp 11

Học sinh lớp 11 đã có kiến thức về Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng. Chúng tôi đề xuất cách giải bài toán Ơ-le nêu trên bằng Phép vị tự như sau:

Cách giải 6

Gọi A'; B'; C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AC.



Hình 6

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên OA' là đường trung trực của cạnh BC. Suy ra $OA' \perp BC$ tại A', mà $B'C' \parallel BC$ (đường trung bình) nên $OA' \perp B'C'$.

Tương tự chứng minh được: $OB' \perp A'C'$.

Do đó O là trực tâm tam giác $A'B'C'$ (giao 2 đường cao).

Mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên có:

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}; \quad \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB};$$

$$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$

Suy ra

$V_{(G,-\frac{1}{2})}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'.$

Mà $H,\ O$ lần lượt là là trực tâm tam giác ABC và tam giac $A'B'C'$ nên:

$V_{(G,-1/2)}(H) = O \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ (phép vị tự biến trực tâm thành trực tâm).

Suy ra $H,\ G,\ O$ thẳng hàng và $GH = 2GO$ (điều phải chứng minh).

2.7. Học sinh lớp 12

Học sinh lớp 12 sau khi học xong *"Chương IV- Số phức"*. Học sinh biết cách biểu diễn một số phức trên mặt phẳng tọa độ.

Mỗi số phức $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ đặt tương ứng với một điểm $Z(a,b) \in mp(Oxy)$ tương ứng một véc tơ $\overrightarrow{OZ}$.

Số phức z gọi là nhãn của điểm Z.

Trong phần này, chúng tôi kí hiệu một số phức bằng một chữ thường như a,b,c, z… và được biểu diễn tương ứng trên mặt phẳng tọa độ là chữ in như A, B, C, Z…

Phép cộng 2 số phức $z_1 = (a_1 + b_1 i)$ và $z_2 = (a_2 + b_2 i)$ có tổng là:

$z_3 = z_1 + z_2.$

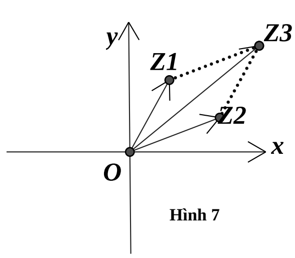
$= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$

Nên $\overrightarrow{OZ_3} = (a_1 + b_1);(a_2 + b_2)$ tương ứng với véc tơ tổng

$\overrightarrow{OZ_3} = \overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$

theo qui tắc hình bình hành.



Hình 7

Nếu M là trung điểm của Z_1, Z_2 thì $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OZ_3}}{2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_3})$. Suy ra $m = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Theo (Cao Minh Quang, 2009, tr. 16) có nêu kết luận như sau: *"Ba điểm Z, Z_1, Z_2 nằm trên đường thẳng khi và chỉ khi tỷ số đơn $V(z, z_1, z_2) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}$ là số thực*

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng qua Z_1, Z_2 là: $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2$

Từ kết quả trên chúng tôi đề xuất bài toán nâng cao về đường thẳng Ơ-le giải được bằng phương pháp số phức như sau:

Bài toán 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho tam giác ABC. Biết các đỉnh $A,\ B,\ C$ được biểu diễn bởi các số phức có nhãn lần lượt $a,\ b,\ c$. Hãy tìm số phức biểu diễn các điểm H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC theo a, b, c?

Từ đó kiểm chứng $H,\ G,\ O$ thẳng hàng?

Cách giải 7

Ta biết, trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) phép đổi trục tọa độ bằng phương pháp tịnh tiến theo một véc tơ cho trước thì biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó, bảo tồn vị trí và tỉ số khoảng cách các điểm trên đường thẳng ấy.

Do vậy, không mất tính tổng quát của bài toán. Ta chọn mặt phẳng tọa độ (Oxy) có gốc tọa độ O trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đã cho

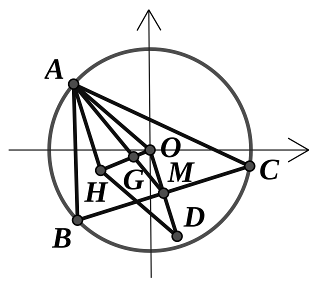
Nên O biểu diễn số phức bằng không.

Các điểm A, B, C được biểu diễn bởi các số phức có nhãn lần lượt a, b, c như đề bài.

Gọi D là điểm đối xứng của O qua BC. Do M trung điểm BC nên

$$m = \frac{b+c}{2}$$

$$d = 2m = b + c.$$



Hình 8

Điểm G' có nhãn

$$g' = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}m$$

nằm trên trung tuyến AM (từ phương trình tham số).

Tương tự, chứng minh được điểm G' cũng nằm trên hai trung tuyến từ đỉnh B và C.

Vậy $G' \equiv G$, tức là trọng tâm G có nhãn là $g = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Mặt khác tứ giác $AHDO$ là hình bình hành $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OD}$ nên $h = d + a = a + b + c.$

Trực tâm H có nhãn là số phức h=a+b+c.

Suy ra $h = 3g$ tức là $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$

Vậy 3 điểm H, G, O thẳng hàng (đường thẳng Ơ-le trong tam giác ABC).

3. Kết luận

Trên cơ sở nghiên cứu và sưu tầm các cách tiếp cận và chứng minh định lý Ơ-le từ sách giáo khoa và các tài liệu tham khảo, bài viết đã trình bày các cách thể hiện đường Ơ-le một cách có hệ thống thông qua *Cách giải 1; Cách giải 2; Cách giải 3; Cách giải 4; Cách giải 5; Cách giải 6; Cách giải 7.* Các cách giải đã được chọn lọc, sắp xếp tinh chỉnh và có bổ sung nhằm cô động lại các kiến thức để phù hợp với khả năng và trình độ của các học sinh theo từng khối lớp riêng lẻ (từ 6 đến 12), nhờ đó sẽ mở rộng được đối tượng học sinh tìm hiểu kiến thức về đường thẳng Ơ-le một cách độc lập qua nhiều hình thức khác nhau.

Bài viết đã đề xuất các bài toán mới: *Bài toán 1; Bài toán 3; Bài toán 4* nhằm làm cho kiến thức đường thẳng Ơ-le được thể hiện liên tục trong từng năm học phổ thông. Điều này vừa thể hiện tính ôn tập, tính kế thừa kiến thức cũ để sáng tạo ý tưởng mới cho học sinh, đồng thời giúp học sinh kiểm chứng tính đúng đắn của đường Ơ-le dưới hiều hình thức và nhiều phương pháp khác nhau trên cơ sở toán học. Riêng học sinh cuối cấp có thể thống kê được số cách tiếp cận đường thẳng Ơ-le trong tam giác thông qua nhiều cách và nhiều nội dung học như: Hình học phẳng, Hình học toạ độ, Hình học véc tơ, Phép biến hình và trên tập số phức...

Hơn nữa qua cách trình bày chứng minh định lý Ơ-le, bài viết đã giới thiệu các kỹ năng chứng minh *"3 điểm thẳng hàng"* là chủ đề quan trọng, cần thiết đối với học sinh phổ thông qua nhiều cách khác nhau như: đường thẳng qua hai điểm đầu đi qua điểm thứ ba (Cách giải 1); sử dụng kiến thức về hai góc kề bù (Cách giải 2); hai góc đối đỉnh (Cách giải 3); hai véc tơ cùng phương (Cách giải 4); ba điểm cùng thuộc một đường thẳng (Cách giải 5); ảnh qua một phép vị tự (Cách giải 6); biểu diễn số phức trên mặt phẳng tọa độ (Cách giải 7)./.

Tài liệu tham khảo

Cao Minh Quang. (2009). *Số phức và ứng dụng trong hình học phẳng, www.Mathvn.com.*

Đoàn Quỳnh và Văn Như Cương. (2007). *Hình học 11 nâng cao,* NXB Giáo dục.

Nguyễn Đức Tấn. (2015). *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi 7,* NXB Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.

Nguyễn Hùng. (2011). Chứng minh một số định lý Hình học nổi tiếng bằng kiến thức trung học cơ sở. Nguồn Mathvn – Thông tin – Tri thức.

Phan Đức Chính và Tôn Thân. (2002). *Toán 6*, NXB Giáo dục.

Phan Đức Chính và Tôn Thân. (2003). Toán 7, NXB Giáo dục.

Phan Đức Chính và Tôn Thân. (2004). *Toán 8*, NXB Giáo dục.

Phan Đức Chính và Tôn Thân. (2005). *Toán 9*, NXB Giáo dục.

Phan Huy Khải. (2011). *Chuyên đề toán trung học phổ thông*, NXB Giáo dục.

Trần Thị Vân Anh. (2012). *Phân dạng & phương pháp giải toán Hình học 10*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Trần Văn Hạo và Nguyễn Mộng Hy. (2007). *Hình học 10*, NXB Giáo dục.

Vũ Tuấn. (2008). *Bài tập giải tích 12*, NXB Giáo dục.

Wikipedia. (2020). Đường thẳng Euler https://vi.wikipedia.org/wiki/Đường_thẳng_Euler.