

## MỘT ĐIỀU KIỆN MỚI ĐỂ MỘT ĐỒ THỊ CÓ SỐ LIÊN THÔNG KHÔNG XUNG ĐỘT LÀ 2

Phạm Ngọc Diệp

*Trường Trung học phổ thông Chuyên Nguyễn Huệ*

**Tóm tắt.** Trong đồ thị có các cạnh được tô màu, một đường được gọi là không xung đột nếu có màu được sử dụng trên các cạnh của đường đó duy nhất một lần. Một đồ thị có các cạnh được tô màu được gọi là đồ thị liên thông không xung đột nếu hai đỉnh bất kì của đồ thị được nối với nhau bởi ít nhất một đường liên thông không xung đột. Đặt  $cf_c(G)$  là số màu nhỏ nhất sao cho ta có thể dùng các màu đó để tô các cạnh của đồ thị  $G$  sao cho  $G$  là đồ thị liên thông không xung đột. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ đưa ra một điều kiện về bậc nhỏ nhất của đồ thị liên thông không đầy đủ  $G$  để  $G$  có  $cf_c(G) = 2$ . Kết quả đạt được là một mở rộng của một kết quả trong bài báo [1] của Chang và các cộng sự.

**Từ khóa:** tô màu cạnh, số liên thông không xung đột, bậc của đỉnh.

### 1. Mở đầu

Trong bài báo này, để đơn giản hóa kí hiệu, chúng ta kí hiệu  $[k]$  cho tập  $\{1, 2, \dots, k\}$  với  $k$  là số nguyên dương bất kì. Chúng ta sẽ sử dụng các thuật ngữ trong tài liệu [2] cho các thuật ngữ không được định nghĩa trong bài báo.

Xét một đồ thị  $G$  đơn, liên thông, hữu hạn và không có hướng. Ta kí hiệu tập các đỉnh, tập các cạnh, số các đỉnh (cấp của  $G$ ) và số các cạnh lần lượt là  $V(G)$ ,  $E(G)$ ,  $n$  và  $m$ . Với mỗi đỉnh  $v \in V(G)$ , ta kí hiệu  $N(v)$  là lân cận của  $v$  trong  $G$  và kí hiệu  $d_G(v) = |N(v)|$  là bậc của  $v$  trong  $G$ . Ta kí hiệu bậc nhỏ nhất của  $G$  là  $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$ . Một cạnh của đồ thị gọi là cạnh cắt nếu chúng ta bỏ cạnh đó khỏi đồ thị (vẫn giữ nguyên hai đầu mút) thì đồ thị mới có số thành phần liên thông lớn hơn số thành phần liên thông của đồ thị ban đầu. Đồ thị đầy đủ cấp  $t$  được kí hiệu là  $K_t$ . Nếu  $u, v \in V(G)$  là hai đỉnh phân biệt và kề nhau trong  $G$ , ta thường viết  $uv$  là cạnh chứa hai đỉnh  $u, v$ . Ta định nghĩa  $C(G)$  là đồ thị con của  $G$  cảm sinh trên tập các cạnh cắt của  $G$ .

Một đường  $P$  (path) trong đồ thị tô màu  $G$  được gọi là *đường cầu vòng* nếu mỗi cạnh của  $P$  được tô bởi các màu khác nhau. Một đồ thị tô màu  $G$  được gọi là *liên thông cầu vòng* nếu hai đỉnh phân biệt bất kì của đồ thị đều được nối bởi ít nhất một đường cầu vòng trong  $G$ . Đối với đồ thị liên thông  $G$ , *số liên thông cầu vòng* của  $G$ , kí hiệu là  $rc(G)$ , được định nghĩa là số màu nhỏ nhất để  $G$  trở thành đồ thị liên thông cầu vòng. Khái niệm số liên thông cầu vòng lần đầu tiên được giới thiệu bởi Chartrand và các cộng sự [3] vào năm 2008. Việc nghiên cứu số  $rc(G)$  là một trong các

vấn đề cốt lõi của bài toán tô màu trong lý thuyết đồ thị. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm về chủ đề này trong các tài liệu [4, 5].

Gần đây, Czap và các cộng sự [6] giới thiệu khái niệm mới *liên thông không xung đột*. Khái niệm này có nhiều mối quan hệ mật thiết với khái niệm liên thông cầu vòng. Một đường của đồ thị tô màu  $G$  được gọi là *không xung đột* (conflict-free) nếu có màu được dùng duy nhất một lần trên các cạnh của nó. Một đồ thị tô màu  $G$  được gọi là đồ thị liên thông không xung đột nếu hai đỉnh bất kì được nối với nhau bởi ít nhất một đường không xung đột. *Số liên thông không xung đột* của đồ thị liên thông  $G$ , được kí hiệu bởi  $cf_c(G)$ , là số màu nhỏ nhất để tô các cạnh của  $G$  sao cho  $G$  là một đồ thị liên thông không xung đột. Ta dễ dàng nhận thấy  $cf_c(G) \leq rc(G)$ . Việc nghiên cứu số  $cf_c(G)$  hiện đang được nhiều nhà toán học nổi tiếng quan tâm và nghiên cứu. Để biết thêm về các kết quả đã đạt được, bạn đọc có thể xem các tài liệu [1, 6-8]

Chúng ta giới thiệu ở đây một trong các kết quả về liên thông xung đột.

**Định lí 1.1.** [1] Cho  $G$  là đồ thị liên thông không đầy đủ có cấp  $n \geq 25$ . Nếu  $C(G)$  là một rìng tuyến tính và  $\delta(G) \geq \frac{n-4}{5}$  thì  $cf_c(G) = 2$ .

Ở bài báo này chúng tôi sẽ mở rộng kết quả của định lí trên. Để làm được điều này, trong mục 2 chúng tôi mở rộng một kết quả về số cạnh cắt của một đồ thị. Áp dụng các kết quả làm được trong mục 2 và các kết quả trước đó trong [1], chúng tôi đưa ra kết quả chính trong mục 3.

## 2. Số các cạnh cắt của một đồ thị

Đầu tiên, chúng ta sẽ định nghĩa hai lớp đồ thị liên thông mới đóng vai trò quan trọng đối với kết quả bài báo này.

**Định nghĩa 2.1.** Xét  $n = kt$ , với  $t \geq k \geq 3$  là hai số nguyên bất kì. Ta kí hiệu  $H$  là một đồ thị liên thông với cấp là  $n$  và  $\delta(H) = t - 1 = \frac{n-k}{k}$  chứa tập gồm  $k - 1$  cạnh cắt (được gọi là  $B$ ) và chính xác  $k$  thành phần với cấp  $t$  (được gọi là  $F_i \subseteq H \setminus B, \forall i \in [k]$ ). Hơn nữa, với mỗi  $i \in [k]$ , tồn tại ít nhất một đỉnh  $v_i \in V(F_i)$ , sao cho  $N(v_i) \subseteq V(F_i)$  và  $d_G(v_i) = t - 1$ . Đặt  $\mathcal{H}$  là tập tất cả các đồ thị liên thông của  $H$  (để xem ví dụ về  $\mathcal{H}$ , xem Hình 1).

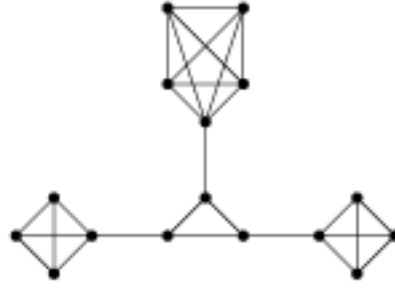


Hình 1. Hai đồ thị  $H_1$  ( $k = t = 3$ ),  $H_2$  ( $k = 3, t = 4$ ) chứa trong  $\mathcal{H}$

**Định nghĩa 2.2.** Cho  $k \geq 3$  là một số nguyên bất kì. Ta kí hiệu  $B_0$  là một đồ thị đầy đủ cấp  $k - 1$ ,  $B_i$  là đồ thị đầy đủ cấp  $k$  với mọi  $i \in [k - 2]$  và  $B_{k-1}$  liên thông cấp  $k + 1$  và có  $k$  đỉnh với bậc lớn hơn hoặc bằng  $k - 1$  và một đỉnh (gọi là  $u_{k-1}$ ) có bậc lớn hơn hoặc bằng  $k - 2$ . Đặt  $V(B_0) = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  là tập các đỉnh của  $B_0$ . Ta xây dựng đồ thị liên thông  $F$  bằng cách thêm các cạnh nối  $v_i \in V(B_0)$  và  $u_j \in V(B_j), \forall j \in [k - 1]$ . Cụ thể hơn,  $F$  chứa ít nhất  $k - 1$  cạnh cắt,  $n = |V(F)| = k^2$  và  $\delta(F) = k - 1 = \frac{n-k}{k}$ . Kí hiệu  $\mathcal{F}$  là tập các đồ thị liên thông  $F$  (xem Hình 2 cho ta một ví dụ về  $F$ ).

Trong [1], các tác giả đã xác định số cạnh cắt nhỏ nhất phụ thuộc vào bậc nhỏ nhất của đồ thị liên thông bởi kết quả sau.

Một điều kiện mới để một đồ thị có số liên thông không xung đột là 2



Hình 2. Một đồ thị liên thông  $F$  thuộc vào  $\mathcal{F}$

**Định lí 2.1.** [1] Cho  $G$  là một đồ thị liên thông cấp  $n \geq k^2, k \geq 3$ . Nếu  $\delta(G) \geq \frac{n-k+1}{k}$ , thì  $G$  có nhiều nhất  $k - 2$  cạnh cắt.

Hơn nữa, các tác giả cũng chỉ ra các ví dụ để thấy rằng nếu ta thay điều kiện về bậc nhỏ nhất là  $\delta(G) = \frac{n-k}{k}$  thì đồ thị có thể chứa  $k - 1$  cạnh cắt. Do đó điều kiện trong định lí trên là tối ưu. Các điều kiện để một đồ thị có số cạnh cắt của một đồ thị bị chặn cũng được nghiên cứu trong các tài liệu [1].

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra ở đây là liệu chúng ta có thể xác định được tất cả các đồ thị liên thông  $G$  sao cho  $\delta(G) = \frac{n-k}{k}$  và  $G$  chứa ít nhất  $k - 1$  cạnh cắt. Mục đích chính trong mục này là chúng ta đưa ra câu trả lời cho câu hỏi đó. Cụ thể, chúng ta chứng minh kết quả sau.

**Định lí 2.2.** Cho  $G$  là đồ thị liên thông cấp  $n \geq k^2$ , với  $k \geq 3$ . Nếu  $\delta(G) \geq \frac{n-k}{k}$  thì  $G$  có nhiều nhất  $k - 2$  cạnh cắt trừ khi  $G \in \mathcal{H} \cup \mathcal{F}$ .

*Chứng minh.* Chúng ta sẽ chứng minh định lí bằng phản chứng. Giả sử  $G$  có ít nhất  $k - 1$  cạnh cắt. Đặt  $B$  là tập gồm  $k - 1$  cạnh của  $G$ . Do đó,  $G \setminus B$  có chính xác  $k$  thành phần, được gọi là  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Bây giờ chúng ta sẽ xét hai trường hợp như sau:

**Trường hợp 1.** Với mỗi  $j \in [k]$ , tồn tại ít nhất một đỉnh  $v_j \in V(G_j)$  sao cho  $N(v_j) \subseteq V(G_j)$ . Do đó

$$|V(G_j)| \geq d_G(v_j) + 1 = \frac{n-k}{k} + 1 = \frac{n}{k}, \forall j \in [k]$$

$$\Rightarrow n = |V(G)| = \sum_{j=1}^k |V(G_j)| \geq k \cdot \frac{n}{k} = n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |V(G_j)| = \frac{n}{k} = t \\ d_G(v_j) = |V(G_j)| - 1 = t - 1, \forall v_j \in V(G_j). \end{cases}$$

Hơn nữa ta có

$$\delta(G) \geq \frac{n-k}{k} = t - 1 \Rightarrow \delta(G) = t - 1.$$

Khi đó  $G$  đẳng cấu với một đồ thị  $H$  trong  $\mathcal{H}$ .

**Trường hợp 2.** Tồn tại  $i \in [k]$  sao cho  $N(v) \not\subseteq V(G_i)$  với mọi đỉnh  $v \in V(G_i)$ .

Bây giờ ta xét một chỉ số  $i$  như vậy và kí hiệu  $a = |V(G_i)|$ . Khi đó ta có  $a \leq k - 1$ . Do  $N(v) \not\subseteq V(G_i)$  với mọi đỉnh  $v \in V(G_i)$  nên mỗi đỉnh  $v \in V(G_i)$  là đỉnh của ít nhất một cạnh cắt trong  $B$ . Đặt  $m_i$  là tổng bậc của tất cả các đỉnh của  $|V(G_i)|$  trong đồ thị cảm sinh từ  $G$  là  $G[V(G_i) \cup B]$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{n-k}{k} \cdot a &\leq m_i \leq a(a-1) + k - 1 \\ \Rightarrow a\left(a - \frac{n}{k}\right) + k - 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kết hợp với  $1 \leq a \leq k - 1$ , ta suy ra

$$(k-1)\left(k-1 - \frac{n}{k}\right) + k - 1 \geq 0.$$

Sau một số bước biến đổi ta thu được  $n \leq k^2$ . Kết hợp với giả thiết, ta có các dấu đẳng thức xảy ra như sau:

$$\begin{cases} n = k^2 \\ a = k - 1 \\ d_G(v) = \frac{n-k}{k} = k - 1, \forall v \in V(G_i). \end{cases}$$

Khi đó mỗi đỉnh  $v \in V(G_i)$  sẽ là đỉnh của chính xác một cạnh cắt của  $B$ . Hơn nữa,  $G_i$  không chứa cạnh cắt nào của  $G$ . Ta dễ dàng thu được  $G_i = K_{k-1}$ . Ta có:

$$\sum_{j \neq i} |V(G_j)| = n - |V(G_i)| = k^2 - k + 1.$$

Mặt khác, cho mỗi  $\forall j \in [k] \setminus \{i\}$ , chỉ có chính xác một đỉnh  $v_j \in V(G_j)$  là đỉnh của chính xác một cạnh cắt thuộc  $B$ . Do  $\delta(G) \geq \frac{n-k}{k} = k - 1$  nên ta có  $|V(G_j)| \geq k, \forall j \in [k] \setminus \{i\}$ . Suy ra, với mỗi  $j \in [k] \setminus \{i\}$ , luôn tồn tại ít nhất một đỉnh  $v_j \in V(G_j)$  sao cho  $N(v_j) \subseteq V(G_j)$ . Dễ dàng thấy rằng  $k - 2$  thành phần  $G_j$  là các đồ thị đầy đủ cấp  $k$ , với  $j \in [k - 1] \setminus \{i\}$  và thành phần còn lại có cấp  $k + 1$  chứa  $k$  đỉnh bậc nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng  $k - 1$  mà chúng không phải là đỉnh của bất kì một cạnh cắt nào trong  $G$ , và một đỉnh bậc  $k - 2$  là đỉnh của chính xác một cạnh cắt trong  $G$ . Do đó,  $G$  đẳng cấu với một đồ thị của  $\mathcal{F}$ .

Vậy định lí được chứng minh. □

### 3. Đồ thị có số liên thông không xung đột là 2

Trước khi xem xét các kết quả, ta phát biểu một số các kết quả cơ bản trên các đồ thị liên thông không xung đột.

Ta gọi lại  $C(G)$  là đồ thị con của  $G$  cảm sinh từ  $G$  bởi tập các cạnh cắt của  $G$ . Chú ý rằng  $C(G)$  có thể rỗng. Trong [6], Czap và các cộng sự đã chứng minh bổ đề dưới đây cho chúng ta biết một điều kiện cần cho đồ thị  $G$  chứa cạnh cắt có  $cf c(G) = 2$ .

**Bổ đề 3.1.** [6] *Nếu  $cf c(G) = 2$  với đồ thị  $G$  có cạnh cắt, thì  $C(G)$  là một rừng tuyến tính (tức là mỗi thành phần liên thông của nó là một đường) mà mỗi thành phần của nó có nhiều nhất 3 cạnh.*

Hơn nữa, trong [6], Czap và các cộng sự cũng đưa ra được điều kiện đủ về  $C(G)$  để  $G$  có  $cf c(G) = 2$ .

**Định lí 3.1.** [6] Nếu  $G$  là đồ thị liên thông và  $C(G)$  là một rừng tuyến tính mà mỗi thành phần của nó có cấp 2, thì  $cf c(G) = 2$ .

Mặt khác, nếu  $C(G)$  là một rừng tuyến tính chứa  $k$  ( $k \geq 0$ ) thành phần  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  với  $n_i = |V(Q_i)|$  thỏa mãn  $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ , thì Chang và các cộng sự [1] đã mở rộng chứng minh Định lí 3.1 bởi kết quả sau.

**Định lí 3.2.** [1] Nếu  $G$  là một đồ thị liên thông không đầy đủ có  $C(G)$  là một rừng tuyến tính với  $2 = n_1 = n_2 = \dots = n_{k-1} \leq n_k \leq 4$  hoặc  $C(G)$  không chứa cạnh, thì  $cf c(G) = 2$ .

Trong bài báo này, ta sẽ mở rộng Định lí 1.1 bởi kết quả sau.

**Định lí 3.3.** Cho  $G$  là một đồ thị liên thông không đầy đủ có cấp  $n \geq 25$ . Nếu  $C(G)$  cảm sinh một rừng tuyến tính,  $\delta(G) \geq \frac{n-5}{5}$  và  $G$  không thuộc lớp các đồ thị  $\mathcal{H} \cup \mathcal{F}$ , thì  $cf c(G) = 2$ .

*Chứng minh.* Kết hợp Định lí 2.2 và  $G \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{F}$  với  $\delta(G) \geq \frac{n-5}{5}$ ,  $C(G)$  chứa nhiều nhất 3 cạnh. Hơn nữa  $C(G)$  là một rừng tuyến tính nên áp dụng Định lí 3.2, ta suy ra  $cf c(G) = 2$ .  $\square$

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] H. Chang, T. D. Doan, Z. Huang, S. Jendrol', X. Li, I. Schiermeyer, 2018. Graphs with Conflict-Free Connection Number Two. *Graphs and Combinatorics*, **34**, 1553-1563.
- [2] D. B. West, 2001. *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- [3] G. Chartrand, G. L. Johns, K. A. McKeon, P. Zhang, 2008. Rainbow connection in graphs. *Math Bohemica*, **133**, 85-98.
- [4] X. Li, Y. Shi, Y. Sun, 2013. Rainbow connections of graphs: A survey. *Graphs & Combin.*, **29**, 1-38.
- [5] X. Li, Y. Sun, 2012. Rainbow Connections of Graphs, *Springer Briefs in Math.*, Springer, New York.
- [6] J. Czap, S. Jendrol', J. Valiska, 2018. Conflict-free connections of graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, **38**, 1007-1021.
- [7] H. Chang, Z. Huang, X. Li, Y. Mao, H. Zhao, Nordhaus-Gaddum-type theorem for conflict-free connection number of graphs, arXiv:1705.08316v1[math.CO].
- [8] P. Cheilaris, B. Keszegh. D. Pálvögyi, 2013. Unique-maximum and conflict-free coloring for hypergraphs and tree graphs, *SIAM J. Discrete Math*, **27**, 1775-1787.

## ABSTRACT

### A new condition for a graph having conflict free connection number 2

Pham Ngoc Diep

Nguyen Hue High School for the Gifted

A path in an edge-coloured graph is called *conflict-free* if there is a colour used on exactly one of its edges. An edge-coloured graph is said to be *conflict-free connected* if any two distinct vertices of the graph are connected by a conflict-free path. The *conflict-free connection number*, denoted by  $cf c(G)$ , is the smallest number of colours needed in order to make  $G$  conflict-free connected. In this paper, we give a new condition to show that a connected non-complete graph  $G$  having  $cf c(G) = 2$ . This is an extension of a result by Chang *et al.* [1].

**Keywords:** edge-colouring, conflict-free connection number, degree of vertices.