ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 225(06): 459 - 463

SỬ DỤNG LƯỚI TỰA ĐỀU GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH SONG ĐIỀU HÒA VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN DIRICHLET TRONG NỬA DẢI

Trần Đình Hùng*, Nông Quỳnh Vân
Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Các bài toán giá trị biên cho phương trình song điều hòa có một số ứng dụng trong vật lý, cơ học và kỹ thuật. Trong bài báo này, chúng tôi tìm nghiệm gần đúng của bài toán song điều hòa với điều kiện biên Dirichlet trong nửa dải. Sử dụng lưới tính toán tựa đều để tính chủ yếu các giá trị gần biên hữu hạn đồng thời có thể xử lý điều kiện biên tại vô cùng. Dựa trên ý tưởng của Polozhii trong phương pháp biểu diễn tổng, đưa phương trình véctơ ba điểm về dạng phương trình vô hướng ba điểm. Chúng tôi cũng đưa ra một số ví dụ minh họa cho hiệu quả của phương pháp.
Từ khóa: *Lưới tựa đều; phương trình song điều hòa; điều kiện biên Dirichlet; nửa dải; phương trình véctơ ba điểm.*

Ngày nhận bài: 21/5/2020; Ngày hoàn thiện: 28/5/2020; Ngày đăng: 31/5/2020

USING QUASI-UNIFORM GRIDS FOR SOLVING THE BIHARMONIC EQUATION WITH DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS IN SEMISTRIP

Tran Dinh Hung*, Nong Quynh Van
TNU - University of Education

ABSTRACT

Boundary value problems for biharmonic equations have many applications in physics, mechanics and engineering. In this paper, we find an approximation solution of the biharmonic problem with Dirichlet boundary conditions in a semistrip. Using quasi-uniform grids to find mostly near-finite boundary values and at the same time be able to handle boundary conditions at infinity. Using the idea of Polozhii in the method of summary representations to transform the system of three-point vector equations to systems of three-point scalar equations. Some examples demonstrate the applicability of the proposed method.
Keywords: *Quasi-uniform grids; biharmonic equation; Dirichlet boundary; semistrip; three-point vector equations.*

Received: 21/5/2020; Revised: 28/5/2020; Published: 31/5/2020

* Corresponding author. *Email: hungtd@tnue.edu.vn*

1. Giới thiệu

Các bài toán giá trị biên cho phương trình Berger [1] có một số ứng dụng trong vật lý, cơ học và kỹ thuật. Cụ thể, bài toán Dirichlet cho phương trình Berger biểu diễn trực tiếp các ứng dụng trong lý thuyết về độ võng của các bản mỏng. Bài toán giá trị biên song điều hòa với các điều kiện biên Dirichlet có thể được xét như trường hợp đặc biệt của bài toán giá trị biên Dirichlet cho phương trình Berger. Các bài toán về phương trình song điều hòa thu hút được sự quan tâm lớn của rất nhiều nhà cơ học và toán học. Trong [2], Meleshko đã tổng hợp khá nhiều phương pháp mà các nhà cơ học đã sử dụng để giải bài toán song điều hòa hai chiều như phương pháp hàm Green, phương pháp hàm phức và một số phương pháp gần đúng giải tích như phương pháp chuỗi Fourier, phương pháp Ritz, phương pháp Bubnov-Galerkin với các hàm cơ sở được chọn là các hàm trơn đối với một số miền đặc biệt như hình chữ nhật, hình ellip,... Trong bài này các vấn đề về định tính cũng như các đánh giá về độ phức tạp tính toán của các phương pháp chưa được đề cập đến. Matevossian [3] nghiên cứu về tính giải được, duy nhất nghiệm của bài toán biên Neumann cho phương trình song điều hòa trong miền không giới nội với giả thiết nghiệm có tích phân Dirichlet bị chặn.

Các phương pháp gần đúng giải tích cũng được nhiều tác giả sử dụng để giải phương trình song điều hòa trong miền bị chặn như phương pháp bình phương cực tiểu, phương pháp nghiệm cơ bản, phương pháp phương trình tích phân biên. Bài toán giải phương trình song điều hòa trong nửa dải xuất hiện trong lý thuyết đàn hồi và trong nghiên cứu dòng chảy chậm của chất lỏng nhớt.

Một số bài toán biên Dirichlet trong miền không giới nội được xử lý khá hiệu quả thông qua lưới tính toán tựa đều. Phương pháp này thường được áp dụng đối với các bài toán mà sự lan truyền vật chất nhỏ dần khi càng xa nguồn phát. Khi đó, hầu như các giá trị ở gần nguồn sẽ được ưu tiên tính toán và cần độ chính xác cao hơn. Hơn nữa, theo lưới tựa đều, điều kiện biên tại vô cùng được xử lý một cách dễ dàng.

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng lưới tính toán tựa đều giải gần đúng phương trình song điều hòa với điều kiện biên Dirichlet trong nửa dải.

2. Lưới tựa đều

Cho $x(\xi)$ là hàm trơn, đơn điệu chặt của biến $\xi \in [0,1]$. Lưới không đều

$$\omega_N = \{x_i = x(i/N), \quad i = 0,1,...,N\}, \tag{1}$$

với $x(0)=0, x(1)=+\infty$ được gọi là lưới tựa đều trên $[0,+\infty]$. Để xây dựng các lưới tựa đều, người ta thường xét 3 hàm [4]:

$$x(\xi) = -c\ln(1-\xi),$$

$$x(\xi) = c\tan\frac{\pi\xi}{2},$$

$$x(\xi) = c\frac{\xi}{1-\xi}.$$

Khi đó ta được 3 lưới tựa đều tương ứng:

Lưới logarithm:

$$\omega_N = \{x_i = -c\ln(1-\frac{i}{N}), i = 0,1,...,N\}.$$

Lưới tangent:

$$\omega_N = \{x_i = c\tan\frac{\pi i}{2N}, i = 0,1,...,N\}.$$

Lưới hyperbol:

$$\omega_N = \{x_i = c\frac{i}{N-i}, i = 0,1,...,N\}.$$

Trong đó $c > 0$ là tham số điều khiển.

Sử dụng xấp xỉ đạo hàm cấp 2:

$$\begin{aligned}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_i \approx \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}(\frac{u_{i+1} - u_i}{2(x_{i+3/4} - x_{i+1/4})} - \\ - \frac{u_i - u_{i-1}}{2(x_{i-1/4} - x_{i-3/4})}).\end{aligned} \tag{2}$$

Xấp xỉ giá trị của u tại điểm giữa của lưới:

$$u_{i+1/2} \approx \frac{x_{i+1} - x_{i+1/2}}{x_{i+1} - x_n}u_i + \frac{x_{i+1/2} - x_i}{x_{i+1} - x_i}u_{i+1}.$$

Các công thức trên chứa $u_N = u_\infty$ nhưng không chứa $x_N = \infty$. Các xấp xỉ sai phân hữu hạn trên có bậc chính xác $O(N^{-2})$.

3. Xây dựng lược đồ sai phân

Xét bài toán giá trị biên Dirichlet cho phương trình Berger:

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 u - b(x)\Delta u = f(x,y), \quad x>0, 0<y<1,\\
&u(x,0)=\varphi_{01}(x), u(x,1)=\varphi_{02}(x),\\
&u(0,y)=\psi_0(y), u(x,y)\to 0, x\to+\infty, \qquad (3)\\
&\Delta u(x,0)=\varphi_{11}(x), \Delta u(x,1)=\varphi_{12}(x),\\
&\Delta u(0,y)=\psi_1(y).
\end{aligned}$$

với các giả thiết thông thường là các hàm trong (3) liên tục và

$$0\le b(x)\le B,\ f(x,y)\to 0,$$
$$\varphi_{0i}(x)\to 0, i=1,2, \quad x\to+\infty.$$

Nhận xét rằng khi $b(x)=0$, phương trình (3) là phương trình bản mỏng kinh điển và nó có thể phân tích thành 2 bài toán dạng phương trình Poisson liên tiếp.

Đặt $\Delta u = v, \quad x>0, 0<y<1.$

Khi đó bài toán (3) được chuyển về 2 bài toán cấp 2 như sau:

$$\begin{aligned}
&\Delta v - bv = f, \quad x>0, 0<y<1,\\
&v(x,0)=\varphi_{11}(x), v(x,1)=\varphi_{12}(x), \qquad (4)\\
&v(0,y)=\psi_1(y), v(x,y)\to 0, x\to+\infty.
\end{aligned}$$

Và $\Delta u = v, \quad x>0, 0<y<1,$

$$\begin{aligned}
&u(x,0)=\varphi_{01}(x), u(x,1)=\varphi_{02}(x), \qquad (5)\\
&u_x(0,y)=\psi_0(y), u(x,y)\to 0, x\to+\infty.
\end{aligned}$$

Xét lưới tựa đều ω_N (1) theo hướng x và lưới đều theo biến y:

$$y_j = jh_2, \quad j=0,1,...,M.$$

Khi đó ta có lưới $\overline{\omega}=\{x_i,y_j\}$ với x_i, y_j được xác định như trên. Gọi $\overline{v}_{i,j}$ và $\overline{u}_{i,j}$ lần lượt là giá trị xấp xỉ của $v(x_i,y_j)$ và $u(x_i,y_j)$ với $(x_i,y_j)\in\overline{\omega}$ và

$$b_i = b(x_i),\ f_{ij}=f(x_i,y_j), (x_i,y_j)\in\overline{\omega}.$$

Sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm bậc 2 (2) trên lưới tựa đều x_i và công thức xấp xỉ đạo hàm thông thường trên lưới đều y_i, ta có lược đồ sai phân cho bài toán (4):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_{i+1/2}-x_{i-1/2}}\Big(\frac{\overline{v}_{i+1,j}-\overline{v}_{i,j}}{2(x_{i+3/4}-x_{i+1/4})}-\\
&-\frac{\overline{v}_{i,j}-\overline{v}_{i-1,j}}{2(x_{i-1/4}-x_{i-3/4})}\Big)+\frac{\overline{v}_{i,j-1}-2\overline{v}_{i,j}+\overline{v}_{i,j+1}}{h_2^2}-\\
&-b_i\overline{v}_{i,j}=f_{ij}, \quad (x_i,y_j)\in\overline{\omega} \qquad (6)\\
&\overline{v}_{i,0}=\varphi_{11}(x_i), \overline{v}_{i,M}=\varphi_{12}(x_i),\\
&\overline{v}_{0,j}=\psi_1(y_j), \overline{v}_{N,j}=0.
\end{aligned}$$

và lược đồ sai phân cho bài toán (5):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_{i+1/2}-x_{i-1/2}}\Big(\frac{\overline{u}_{i+1,j}-\overline{u}_{i,j}}{2(x_{i+3/4}-x_{i+1/4})}-\\
&-\frac{\overline{u}_{i,j}-\overline{u}_{i-1,j}}{2(x_{i-1/4}-x_{i-3/4})}\Big)+\frac{\overline{u}_{i,j-1}-2\overline{u}_{i,j}+\overline{u}_{i,j+1}}{h_2^2}=\overline{v}_{i,j},\\
&(x_i,y_j)\in\overline{\omega} \qquad (7)\\
&\overline{u}_{i,0}=\varphi_{01}(x_i), \overline{u}_{i,M}=\varphi_{02}(x_i),\\
&\overline{u}_{0,j}=\psi_0(y_j), \overline{u}_{N,j}=0.
\end{aligned}$$

Lược đồ sai phân (6) và (7) có cấp xấp xỉ là $O(N^{-2}+h_2^2)$.

4. Phương pháp giải

Viết lại lược đồ sai phân (6) dưới dạng hệ phương trình véctơ ba điểm:

$$A_i\overline{V}_{i-1}+\frac{1}{h_2^2}T\overline{V}_i+B_i\overline{V}_{i+1}-(A_i+B_i+\frac{2}{h_2^2}+b_i)\overline{V}_i=\overline{F}_i^1,$$

$$i=1,2,...,N \qquad (8)$$

trong đó:

$$A_i = \frac{1}{2(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(x_{i-1/4} - x_{i-3/4})},$$

$$B_i = \frac{1}{2(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(x_{i+3/4} - x_{i+1/4})}, \quad (9)$$

$$i = 1,2,...,N.$$

$$\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} \psi_1(y_1) \\ \psi_1(y_2) \\ ... \\ \psi_1(y_{M-1}) \end{pmatrix}, \quad \overline{V}_i = \begin{pmatrix} \overline{v}_{i,1} \\ \overline{v}_{i,2} \\ ... \\ \overline{v}_{i,M-2} \\ \overline{v}_{i,M-1} \end{pmatrix},$$

$$\overline{F}_i^1 = \begin{pmatrix} f_{i,1} - \frac{1}{h_2^2}\varphi_{11}(x_i) \\ f_{i,2} \\ ... \\ f_{i,M-2} \\ f_{i,M-1} - \frac{1}{h_2^2}\varphi_{12}(x_i) \end{pmatrix}, \ i = 1,2,...,N.$$

$\overline{V}_N = 0$ và T là ma trận cấp $M-1$:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & ... & . & . & . \\ . & . & . & . & ... & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tiếp theo, chúng tôi áp dụng phương pháp đối trong [5] dựa trên ý tưởng của Polozhii trong phương pháp biểu diễn tổng để biến đổi hệ vô hạn phương trình véctơ ba điểm thành hệ vô hạn phương trình vô hướng ba điểm.

Ký hiệu

$$S = (s_{ij}), \quad s_{ij} = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin\frac{ij\pi}{M},$$

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{M-1}], \quad \lambda_j = 2\cos\frac{j\pi}{M},$$

$$i, j = 1,2,...,M-1.$$

Dễ thấy $S^T = S,\ S^2 = E$ và $T = S^{-1}\Lambda S.$

Nhân (8) với S và đặt

$$W_i^1 = (w_{i,j}^1) = S\overline{V}_i,\ i = 0,1,2,...,N$$

$$G_i^1 = (g_{i,j}^1) = S\overline{F}_i^1,\ i = 1,2,...,N,\ j = 1,2,...,M-1.$$

Khi đó (8) được đưa về dạng hệ phương trình véctơ ba điểm của $W_i^1, i = 0,1,2,...,$ như sau:

$$A_i W_{i-1}^1 + \frac{1}{h_2^2}\Lambda W_i^1 + B_i W_{i+1}^1 -$$

$$-(A_i + B_i + \frac{2}{h_2^2} + b_i)W_i^1 = G_i^1, i = 1,2,...,N.$$

Khi cố định chỉ số j ta có hệ phương trình vô hướng ba điểm:

$$A_i w_{i-1,j}^1 - C_{i,j}^1 w_{i,j}^1 + B_i w_{i+1,j}^1 = -F_{i,j}^1,\ i = 1,2,...,N$$

$$w_{0,j}^1 = \mu_0, \quad w_{N,j}^1 = 0, \quad (10)$$

trong đó A_i và B_i được xác định trong (9), $F_{i,j}^1 = -g_{i,j}^1, \mu_0 = \sum_{l=1}^{M-1} s_{j,l}\psi_1(y_l)$ và

$$C_{i,j}^1 = A_i + B_i + b_i + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{j\pi}{2M} > 0.$$

Để giải hệ phương trình vô hướng ba điểm (10), ta có thể áp dụng phương pháp truy đuổi trong [6].

Sau khi tìm được $W_i^1,\ i = 0,1,2,...,N,\ \overline{V}_i$ được xác định bởi $\overline{V}_i = SW_i^1,\ i = 0,1,2,...,N.$

Nghiệm của lược đồ sai phân (7) được tìm tương tự như trên.

Chúng tôi thực hiện một số ví dụ số trên 3 lưới tựa đều logarithm, tangent và hyperbol, số nút lưới là N, tham số điều khiển c. Trong bảng kết quả sai số $\max_i |\overline{u}_{i,j} - u(x_i, y_j)|$ biểu diễn sai số giữa nghiệm xấp xỉ và nghiệm đúng.

Ví dụ 1. Chọn

$$b(x) = 2, u = \frac{x(1+y)}{x^3+1}.$$

Bước lưới $h_2 = 0,1$. Kết quả tính toán trên lưới tựa đều được cho trong bảng 1.

Bảng 1. *Sai số của nghiệm gần đúng trong ví dụ 1*

N	c	Sai số		
		logarithm	**tangent**	**hyperbol**
40	1	0,0216	2.10^{-3}	2.10^{-3}
60	1	0,0159	4.10^{-4}	3.10^{-4}

Ví dụ 2. Chọn

$$b(x)=1,\ u=e^{-2x}\sin(x+2)\cos y$$

Tham số điều khiển $c=1$. Kết quả tính toán trên lưới tựa đều được cho trong bảng 2:

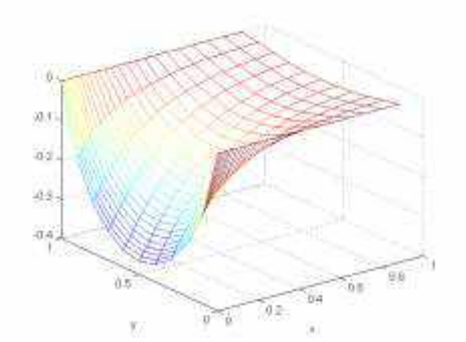
Bảng 2. *Sai số của nghiệm gần đúng trong ví dụ 2*

N	h_2	Sai số		
		logarithm	**tangent**	**hyperbol**
40	0.1	0,0445	0,0148	0,0163
60	0.1	0,0329	0,0103	0,0092
40	0.01	6.10^{-3}	3.10^{-5}	4.10^{-5}
60	0.01	2.10^{-3}	10^{-5}	2.10^{-5}

Ví dụ 3. Trong ví dụ này, ta xét trường hợp chưa biết trước nghiệm đúng của bài toán. Chọn $\begin{array}{l}\varphi_{01}(x)=0, \varphi_{02}(x)=0, \psi_0(y)=1,\\ \varphi_{11}(x)=0, \varphi_{12}(x)=0, \psi_1(y)=0.\end{array}$

Hàm vế phải: $f(x,y)=\dfrac{5\sin(x)}{x+y+\cos(y)}.$

Chọn bước lưới $h_2=0{,}1.$



Hình 1. *Đồ thị nghiệm xấp xỉ sử dụng lưới tựa đều tangent với N = 40, c = 1.*

5. Kết luận

Nội dung chính của bài báo là áp dụng lưới tựa đều vào giải bài toán biên Dirichlet cho phương trình song điều hòa trong nửa dải và áp dụng ý tưởng của Polozhii trong phương pháp biểu diễn tổng để đưa phương trình véctơ ba điểm về dạng phương trình vô hướng ba điểm. Một số thực nghiệm số được thực hiện minh họa cho tính hữu hiệu của phương pháp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1]. H. M. Berger, “A new approach to the analysis of large deflection of plates,” *Journal of Applied Mechanics,* vol. 22, pp. 465-472, 1955.

[2]. V. V. Meleshko, “Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem,” *Applied Mechanics Reviews,* vol. 56, no. 1, pp. 33-85, 2003.

[3]. O. A. Matevossian, “On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains,” *Math Notes,* vol. 98, pp. 990-994, 2015.

[4]. R. Fazio, and A. Jannelli, “Finite difference schemes on quasi-uniform grids for BVPs on infinite intervals,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 269, pp. 14-23, 2014.

[5]. Q. A. Dang, and D. H. Tran, “Method of infinite systems of equations for solving an elliptic problem in a semistrip,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 87, pp. 114-124, 2015.

[6]. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*. New York:. Marcel Dekker, 2001.