ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 225(06): 218 - 222

BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG TỔNG QUÁT VÀ Ý NGHĨA KINH TẾ

Nguyễn Quỳnh Hoa
Trường Đại học Kinh tế và Quản trị kinh doanh – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Cân bằng là một trạng thái vô cùng quan trọng của mọi sự vật, hiện tượng. Đặc biệt trong kinh tế, cân bằng giữa cung và cầu là một trạng thái cả người tiêu dùng và người sản xuất luôn mong muốn đạt được. Bài toán cân bằng trong kinh tế đã được rất nhiều các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Bài báo này trình bày mô hình toán học dưới dạng bài toán tựa cân bằng tổng quát của mô hình cân bằng giữa cung - cầu trong kinh tế và chứng minh cho sự tồn tại nghiệm của bài toán này khi một số điều kiện được thỏa mãn. Bài toán tựa cân bằng tổng quát bao hàm rất nhiều lớp bài toán tối ưu mà ta đã biết như bài toán tựa bao hàm thức biến phân, bài toán tựa quan hệ biến phân,... Điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán này đã được nhiều tác giả nghiên cứu. Ở đây, tác giả chứng minh điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát khi hàm mục tiêu là ánh xạ nửa liên tục dưới dựa trên các các kiến thức cơ bản về giải tích đa trị, đặc biệt là định lý Hahn – Banach, định lý phân hoạch đơn vị và định lý điểm bất động Ky Fan. Đây là một trong những kết quả quan trọng của lý thuyết tối ưu.

Từ khóa: *Toán ứng dụng; mô hình kinh tế; bài toán tựa cân bằng tổng quát; điều kiện đủ; lý thuyết tối ưu; tựa quan hệ biến phân; …*

Ngày nhận bài: 08/10/2019; Ngày hoàn thiện: 11/5/2020; Ngày đăng: 20/5/2020

GENERAL QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEM AND ECONOMIC SIGNIFICANCE

Nguyen Quynh Hoa
TNU – University of Economics and Business Administration

ABSTRACT

Balance is an extremely important state of all things. Especially in the economy, the balance between supply and demand is a state that both consumers and producers are always eager to achieve. The equilibrium problem in economics has been studied by many scientists. This paper presents the mathematical model in the form of a general quasi-equilibrium problem of the demand-supply model in economics and proves the existence of the solution of this problem when some conditions are satisfied. The general quasi-equilibrium problem includes many classes of optimal problems that we know as quasi-variational inclusion problem, quasi-variational relation problem, etc. Sufficient conditions for the existence of solutions to general quasi-equilibrium problem were studied by many authors. Here, the author proves the sufficient conditions for the existence of the solution of the general quasi-equilibrium problem when the utility function is a semi-continuous lower mapping based on the basic knowledge of multi-value analysis, especially Hahn - Banach theorem, and fixed point Ky Fan theorem. This is one of the important results of optimization theory.

Keywords: *Applied Mathematics; economical model; quasi-equilibrium problem; sufficient conditions; optimal theory; quasi-variational relation; etc.*

Received: 08/10/2019; Revised: 11/5/2020; Published: 20/5/2020

* Corresponding author. *Email: hoakhcb@gmail.com*

1. Đặt vấn đề

Toán học có mối liên hệ với rất nhiều các ngành khoa học khác, đặc biệt là mối liên hệ giữa toán học và kinh tế học. Từ những mô hình kinh tế, sử dụng công cụ của toán học, ta có thể đưa về các bài toán để tìm phương pháp giải. Chẳng hạn với mô hình kinh tế: Cho A là nhà máy sản xuất giấy, B là cửa hàng tiêu thụ giấy. Nhà máy A có tập các phương án sản suất là D, cửa hàng B có tập các phương án tiêu thụ là K. Lợi nhuận của nhà máy hay cửa hàng tiêu thụ phụ thuộc vào phương án sản xuất hay phương án tiêu thụ mà họ chọn. Với mỗi phương án x thuộc D và y thuộc K, lãnh đạo nhà máy A và chủ cửa hàng tiêu thụ B lần lượt có tập phương án chỉ đạo là $S(x, y)$ và $T(x, y)$. Giữa sản xuất và tiêu thụ luôn có mối quan hệ cung – cầu. Ổn định mối quan hệ cung – cầu chính là mục tiêu của nhà sản xuất. Mô hình kinh tế này có thể được phát biểu qua mô hình toán học của bài toán tựa cân bằng tổng quát. Bài toán được phát biểu như sau: Tìm $(\overline{x}, \overline{y}) \in D \times K$ sao cho:

1. $\overline{x} \in P(\overline{x}, \overline{y})$;

2. $\overline{y} \in Q(\overline{x}, \overline{y})$;

3. $0 \in F(\overline{x}, \overline{y})$.

Trong đó, X, Y, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $D \subseteq X, K \subseteq Z$ là các tập con khác rỗng. Cho các ánh xạ đa trị $P : D \times K \to 2^D, Q : D \times K \to 2^K$, là hàm ràng buộc $F : D \times K \to 2^X$ là hàm mục tiêu.
Đây là một trong những bài toán trọng tâm của lý thuyết tối ưu. Nó bao gồm rất nhiều bài toán mà chúng ta đã biết như: Bài toán cân bằng vô hướng, bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash, bài toán tựa bao hàm thức biến phân, bài toán tựa quan hệ biến phân,...

2. Điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát

Điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát đã được rất nhiều tác giả nghiên cứu, đặc biệt, các tác giả Trương Thị Thùy Dương và Nguyễn Xuân Tấn đã nghiên cứu (xem [1, 2, 3]) trong trường hợp P là ánh xạ liên tục, Q là ánh xạ nửa liên tục trên, F là ánh xạ nửa liên tục trên và tất cả các ánh xạ P, Q, F đều cần có giá trị lồi, đóng, khác rỗng. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát liên quan tới ánh xạ nửa liên tục dưới yếu vô hướng.
Trước khi đi vào kết quả chính, ta nhắc lại một số khái niệm. Ta có định nghĩa về nón tiếp tuyến.

Định nghĩa 2.1. Cho D là tập con của không gian tôpô tuyến tính X và $x \in D$. Khi đó, tập

$$T_D(x) = \overline{\{\alpha(y - x), y \in D, \alpha \geq 0\}}$$

$$= \overline{\{cone(D - x)\}},$$

được gọi là nón tiếp tuyến của tập D tại x, trong đó,

$$\text{cone}M = \{\alpha z, z \in M, \alpha \geq 0\}.$$

Ta có định nghĩa về tính liên tục của các ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 2.2. Cho X, Y là các không gian tôpô, $D \subseteq X$, ánh xạ đa trị $F : D \to 2^Y$. Khi đó,

1. F được gọi là ánh xạ *nửa liên tục trên* (viết tắt, u.s.c) (*nửa liên tục dưới* (viết tắt, l.s.c)) tại $\overline{x} \in D$, nếu với mỗi tập mở V trong Y thỏa mãn $F(\overline{x}) \subseteq V$ $(F(\overline{x}) \cap V \neq \emptyset)$, tồn tại lân cận mở U của $\overline{x}$ sao cho $F(x) \subseteq V$ $(F(x) \cap V \neq \emptyset)$, với mọi $x \in U \cap D$;

2. F được gọi là ánh xạ nửa liên tục trên (dưới) trên D nếu nó là ánh xạ nửa liên tục trên (dưới) tại mọi điểm $x \in D$;

3. F được gọi là ánh xạ liên tục trên D nếu nó vừa là u.s.c vừa là l.s.c trên D.

Tiếp theo, ta có khái niệm về tính liên tục yếu vô hướng của ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 2.3. (xem [4])

1. F được gọi là ánh xạ nửa liên tục dưới yếu vô hướng (gọi tắt là l.s.c yếu vô hướng), nếu với mọi $p \in Y^*$, hàm $c_p^1 : D \to \overline{\mathbb{R}}$:
$$c_p^1(x) = \inf_{v \in F(x)} p(v)$$
là ánh xạ u.s.c trên D (tương đương với $c_p^2(x) = \sup_{v \in F(x)} p(v)$ là ánh xạ l.s.c);

2. F được gọi là ánh xạ nửa liên tục trên yếu vô hướng (gọi tắt là u.s.c yếu vô hướng), nếu với mọi $p \in Y^*$, hàm $d_p^1 : D \to \overline{\mathbb{R}}$:
$$d_p^1(x) = \sup_{v \in F(x)} p(v)$$
là ánh xạ u.s.c trên D (tương đương với $d_p^2(x) = \inf_{v \in F(x)} p(v)$ là ánh xạ l.s.c).

Sau đây, ta sẽ chứng minh điều kiện đủ cho sự tồn tại của bài toán tựa cân bằng tổng quát.

Định lý 2.1. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

1. *D, K là các tập khác rỗng, lồi, compact;*
2. *$P : D \times K \to 2^D$ là ánh xạ đa trị liên tục với giá trị khác rỗng, lồi, đóng;*
3. *$Q : D \times K \to 2^K$ là ánh xạ u.s.c với giá trị khác rỗng, lồi, đóng;*
4. *$F : D \times K \to 2^X$ là ánh xạ l.s.c yếu vô hướng với giá trị lồi;*
5. *Với mỗi $(x, y) \in P(x, y) \times Q(x, y)$, $F(x, y)$ là tập khác rỗng và*
$$F(x, y) \subset T_{P(x,y)}(x).$$

Khi đó, tồn tại $(\overline{x}, \overline{y}) \in D \times K$ sao cho:
i) $\overline{x} \in P(\overline{x}, \overline{y})$;
ii) $\overline{y} \in Q(\overline{x}, \overline{y})$;
iii) $0 \in F(\overline{x}, \overline{y})$.

Chứng minh. Ta đặt
$$B = \{(x, y) \in D \times K | x \in P(x, y), y \in Q(x, y)\}.$$
Xây dựng ánh xạ $H : D \times K \to 2^{D \times K}$, xác định bởi
$$H(x, y) = P(x, y) \times Q(x, y), \quad (x, y) \in D \times K.$$
Dễ thấy, H là ánh xạ u.s.c với giá trị khác rỗng, lồi, compact. Theo định lý điểm bất động Ky Fan, tồn tại $(\overline{x}, \overline{y}) \in D \times K$ sao cho:
$$(\overline{x}, \overline{y}) \in H(\overline{x}, \overline{y}).$$
Suy ra, B là tập khác rỗng. Hơn nữa, vì H là u.s.c và có giá trị đóng nên B là tập đóng và cũng là tập compact. Mặt khác, với $p \in X^*$ cố định, ta định nghĩa hàm $c_p : D \times K \to \mathbb{R}$ bởi
$$c_p(x, y) = \inf_{v \in co(F(x,y))} \langle p, v \rangle, (x, y) \in D \times K.$$
Giả sử với mỗi $(x, y) \in B, 0 \notin F(x, y)$. Ta lấy $v \in F(x, y), v \neq 0$. Theo định lý Hahn - Banach, tồn tại $p \in X^*$ sao cho $\langle p, v \rangle < 0$. Khi đó,
$$c_p(x, y) = \inf_{w \in co(F(x,y))} \langle p, w \rangle \leq \langle p, v \rangle < 0.$$
Suy ra, với mỗi $(x, y) \in B$, tồn tại $p \in X^*$ sao cho $c_p(x, y) < 0$. Dễ thấy, c_p là ánh xạ u.s.c nên tập $U_p = \{(x, y) \in D \times K | c_p(x, y) < 0\}$ là tập khác rỗng, mở. Do đó, $\{U_p\}_{p \in X^*}$ là một phủ mở của B. Vì B là tập compact, nên tồn tại hữu hạn các ánh xạ $p_1, ..., p_s \in X^*$ sao cho $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} U_{p_j}$. Hơn nữa, vì B là tập đóng trong $D \times K$, $U_{p_0} = (D \times K) \backslash B$ là tập mở trong $D \times K$ nên $\{U_{p_0}, U_{p_1}, ..., U_{p_s}\}$ là họ các phủ mở của tập compact $D \times K$.
Theo Định lý phân hoạch đơn vị, tồn tại các hàm $\psi_i : D \times K \to \mathbb{R}$, $(i = 0, 1, ..., s)$ sao cho:
i) $0 \leq \psi_i(x, y) \leq 1$;
ii) $\sum_{i=1}^{s} \psi_i(x, y) = 1$, với mọi $(x, y) \in D \times K$;

iii) Với mỗi $i \in \{0, 1, ..., s\}$, tồn tại $j(i) \in \{0, 1, ..., s\}$ sao cho supp$\psi_i \subset U_{p_{j(i)}}$. Dễ thấy supp$\psi_0 \subset U_{p_0} \subset D \times K \backslash B$.
Mặt khác, ta định nghĩa ánh xạ $\phi : K \times D \times D \to \mathbb{R}$ bởi

$$\phi(y, x, t) = \sum_{i=0}^{s} \langle \psi_i(x, y).p_{j(i)}, t - x\rangle,$$

với mọi $(y, x, t) \in K \times D \times D$. Khi đó, ϕ là hàm liên tục trên $K \times D \times D$. Ngoài ra, với mỗi điểm $(x, y) \in D \times K, \phi(y, x, .) : D \to \mathbb{R}$ là một hàm tuyến tính và $\phi(y, x, x) = 0$, với mọi $(x, y) \in D \times K$.
Vì D, K, P, Q và ánh xạ ϕ thỏa mãn các điều kiện của Hệ quả 3.4 (xem [1]) nên tồn tại $(\overline{x}, \overline{y}) \in D \times K$ sao cho $(\overline{x}, \overline{y}) \in P(\overline{x}, \overline{y}) \times Q(\overline{x}, \overline{y})$ và $\phi((\overline{y}, \overline{x}), t) \geq 0$, với mọi $t \in P(\overline{x}, \overline{y})$.
Suy ra

$$\sum_{i=0}^{s} \langle \psi_i(\overline{x}, \overline{y}).p_{j(i)}, t - \overline{x}\rangle \geq 0, \qquad (1)$$

với mọi, $t \in P(\overline{x}, \overline{y})$.
Đặt $p^* = \sum_{i=0}^{s} \psi_i(\overline{x}, \overline{y}).p_{j(i)}$, từ (1) ta có

$$\langle p^*, t - \overline{x}\rangle \geq 0, \text{ với mọi } t \in P(\overline{x}, \overline{y}).$$

Hơn nữa, $\langle p^*, v\rangle \geq 0$, với mọi $v \in T_{P(\overline{x},\overline{y})}(\overline{x})$.
Từ giả thiết (5) có $F(\overline{x}, \overline{y}) \subset T_{P(\overline{x},\overline{y})}(\overline{x})$.
Do đó,

$$c_{p^*}(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{v \in co(F(\overline{x},\overline{y}))} \langle p^*, v\rangle \geq 0. \qquad (2)$$

Mặt khác, đặt

$$I(\overline{x}, \overline{y}) = \{i \in \{0, 1, ..., s\} | \psi_i(\overline{x}, \overline{y}) > 0\}.$$

Vì $\psi_i(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$ và $\sum_{i=1}^{s} \psi_i(x, y) = 1$, nên $I(\overline{x}, \overline{y}) \neq \varnothing$.
Khi đó, với $(\overline{x}, \overline{y}) \in B, i \in I(\overline{x}, \overline{y})$, thì

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \text{supp}\psi_i \subset U_{p_{j(i)}}.$$

Với mỗi $i \in I(\overline{x}, \overline{y})$, ta có

$$c_{p_{j(i)}}(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{v \in co(F(\overline{x},\overline{y}))} \langle p_{j(i)}, v\rangle < 0. \qquad (3)$$

Với mỗi $v \in F(\overline{x}, \overline{y})$, ta có

$$\begin{aligned}\langle p^*, v\rangle &= \langle \sum_{i=0}^{s} \psi_i(\overline{x}, \overline{y}).p_{j(i)}, v\rangle \\ &\leq \sum_{i=0}^{s} \psi_i(\overline{x}, \overline{y}) \max_{i=1,\dots,s} \langle p_{j(i)}, v\rangle \\ &= \max_{i=1,\dots,s} \langle p_{j(i)}, v\rangle.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$c_{p^*}(\overline{x}, \overline{y}) \leq \max_{i=1,\dots,s} \langle p_{j(i)}, v\rangle,$$

với mọi $v \in co(F(\overline{x}, \overline{y}))$.
Suy ra

$$c_{p^*}(\overline{x}, \overline{y}) \leq \inf_{v \in co(F(\overline{x},\overline{y}))} \max_{i=1,\dots,s} \langle p_{j(i)}, v\rangle.$$

Ta đặt

$$C = \overline{co}\{p_{j(1)}, ..., p_{j(s)}\},$$

$$E = co(F(\overline{x}, \overline{y})), f(p, v) = \langle p, v\rangle$$

và xét tôpô yếu* trên X^*, áp dụng định lý minimax của Sion (xem [5]), ta có

$$\begin{aligned}&\max_{i=1,\dots,s} \inf_{v \in co(F(\overline{x},\overline{y}))} \langle p_{j(i)}, v\rangle \\ &= \inf_{v \in co(F(\overline{x},\overline{y}))} \max_{i=1,\dots,s} \langle p_{j(i)}, v\rangle. \qquad (4)\end{aligned}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$c_p^*(\overline{x}, \overline{y}) \leq \max_{i=1,\dots,s} \inf_{v \in co(F(\overline{x},\overline{y}))} \langle p_{j(i)}, v\rangle < 0. \qquad (5)$$

Ta thấy (2) mâu thuẫn với (5). Vậy định lý được chứng minh.
Ta có một số hệ quả được suy trực tiếp từ định lý.

Hệ quả 2.1. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

1. D, K *là các tập khác rỗng, lồi, compact;*
2. $P : D \times K \to 2^D$ *là ánh xạ đa trị liên tục với giá trị khác rỗng, lồi, đóng;*
3. $Q : D \times K \to 2^K$ *là ánh xạ u.s.c với giá trị khác rỗng, lồi, đóng;*

4. $G : D \times K \to 2^D$ *là ánh xạ l.s.c yếu vô hướng với giá trị lồi;*

5. *Với mỗi* $(x, y) \in P(x, y) \times Q(x, y)$, $G(x, y)$ *là tập khác rỗng và* $G(x, y) - x \subset T_{P(x,y)}(x)$.

Khi đó, tồn tại $(\overline{x}, \overline{y}) \in D \times K$ *sao cho:*
i) $\overline{x} \in P(\overline{x}, \overline{y})$;
ii) $\overline{y} \in Q(\overline{x}, \overline{y})$;
iii) $\overline{x} \in G(\overline{x}, \overline{y})$.

Hệ quả 2.2. *Cho* X *là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff,* $D \subset X$. *Ta giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

1. D *là tập khác rỗng, lồi, compact;*

2. $F : D \to 2^D$ *là ánh xạ l.s.c yếu vô hướng với giá trị lồi, khác rỗng.*

Khi đó, tồn tại $\overline{x} \in D$ *sao cho* $\overline{x} \in F(\overline{x})$.

3. Kết luận

Nội dung chính của bài báo là xuất phát từ một mô hình kinh tế, xây dựng lên bài toán tựa cân bằng tổng quát và đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán này. Từ bài toán tựa cân bằng tổng quát ta có thể đưa về các bài toán đã biết của lý thuyết tối ưu như bài toán cân bằng vô hướng, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng vô hướng, ... Đây là các bài toán có rất nhiều ứng dụng trong kinh tế học.

Tài liệu tham khảo

[1]. T. T. T. Duong, and N. X. Tan, "On the existence of solutions to generalized quasiequilibrium problems of typt I and Related Problems," *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, vol. 13, pp. 29 - 47, 2010.

[2]. T. T. T. Duong, and N. X. Tan, "On the existence of solutions to generalized quasi-equilibrium problems of typt II and Related Problems," *Acta Mathematica Vietnamica*, vol. 36, pp. 231 - 248, 2011.

[3]. T. T. T. Duong, "Mixed generalized quasi-equilibrium problems," *Journal Global Optimization*, vol. 56, no. 2, pp. 647 - 667, 2013.

[4]. F. Heyde and C. Schrage, "Continuity concepts for set-valued functions and a fundamental duality formula for set-valued optimization," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 397, no. 2, pp. 772 - 784, 2013.

[5]. M. Sion, "On general minimax theorems," *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 8, pp. 171 - 176, 1958.