

Phương pháp xấp xỉ tính hệ số dẫn của vật liệu composite với cốt phức hợp có lớp vỏ bọc dị hướng trong không gian hai chiều

■ ThS. NGUYỄN THỊ HƯƠNG GIANG - Trường Đại học Giao thông vận tải

TÓM TẮT: Bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của lớp vỏ bọc dị hướng tới hệ số dẫn nhiệt của vật liệu composite khi sử dụng phương pháp xấp xỉ cốt tương đương. Giả sử đồng nhất cốt đẳng hướng cũng lớp vỏ bọc dị hướng thành một cốt tương đương đẳng hướng có cùng kích thước và tìm hệ số dẫn của cốt tương đương, sau đó sử dụng các công thức có sẵn cho vật liệu hai pha dạng nền - cốt để tìm hệ số dẫn hiệu dụng của vật liệu ban đầu.

TỪ KHÓA: Cốt phức hợp, cốt tương đương, hệ số dẫn hiệu dụng, dị hướng

ABSTRACT: In this paper, study the effect of anisotropic coating on the conductivity of composite materials when using equivalent-inclusion approximation method. Suppose homogeneous isotropic inclusion with anisotropic coating into an isotropic equivalent-inclusion of the same size and find conductivity its. Then use the available formulas for the two-phase composite to find effective conductivity of the starting material.

KEYWORDS: Coated-inclusion, equivalent-inclusion, effective conductivity, anisotropic coating

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ở cấp độ vi mô, các thành phần vật liệu composite có hệ số dẫn khác nhau. Tuy nhiên, khi xem xét ở cấp độ vi mô có thể coi vật liệu là đồng nhất và được đặc trưng bởi hệ số dẫn hiệu dụng. Giá trị đó phụ thuộc vào tính chất của từng pha, tỉ lệ thể tích, cấu trúc hình học, liên kết giữa các pha. Có nhiều phương pháp để xác định hệ số dẫn hiệu dụng như phương pháp đường bao [1-3], các phương pháp xấp xỉ trung bình như phương pháp vi phân [4], phương pháp tu tương hợp [5], phương pháp Mori - Tanaka [6].

Trong quá trình sản xuất do phản ứng hóa học giữa nền - cốt hoặc do kỹ thuật tráng sợi làm hình thành pha trung gian (lớp vỏ bao quanh cốt - interface), mà trong bài báo gọi là vật liệu có cốt phức hợp. Cốt phức hợp được hiểu là cốt cùng lớp vỏ bao quanh cốt. Lớp vỏ này có hệ

số dẫn không giống pha nền hay cốt và làm ảnh hưởng đến tính chất hiệu dụng vi mô của vật liệu. Trong các nghiên cứu trước [7,8], tác giả có tính đến sự ảnh hưởng này khi giả thiết lớp vỏ đẳng hướng. Để phát triển tiếp lý thuyết tính toán, trong bài báo tác giả nghiên cứu khi lớp vỏ bọc dị hướng theo cách tiếp cận cốt tương đương và tính toán số cho một số mô hình cụ thể để kiểm nghiệm tính đúng đắn của các công thức được xây dựng.

2. MÔ HÌNH HÌNH TRÒN LỒNG NHAU

Xét phần tử thể tích đặc trưng (RVE) của vật liệu đẳng hướng nhiều thành phần, có dạng hình tròn trên miền V trong không gian hai chiều. Tâm của hình tròn đặt hệ tọa độ để các (x) . Trong RVE gồm n thành phần V_α có tỉ lệ thể tích u_α , hệ số dẫn C_α ($\alpha = 1, \dots, n$).

Tổng quát hóa từ mô hình hình tròn lồng nhau hai pha của Hashin-Shtrikman sang mô hình n -pha. Ở đây, pha 1 hình tròn được bọc bởi pha 2 hình vành khăn được giới hạn giữa hai hình tròn, hai pha đó được bọc tiếp bởi pha thứ 3..., tiếp tục đến lớp bọc cuối cùng là pha thứ n . Mỗi liên hệ về tỉ lệ thể tích và thứ tự các pha trong n -hình tròn phức hợp là giống nhau. Không gian V sẽ được lấp đầy bởi các hình tròn phức hợp đó một cách ngẫu nhiên, với các bán kính có thể thay đổi, tiến tới nhỏ vô cùng (Hình 2.1).

x_{ji}

V

x_1

Hình 2.1: Phần tử thể tích đặc trưng của mô hình đĩa tròn lồng nhau

Xuất phát từ nguyên lý năng lượng cực tiểu và bù cực tiểu, đánh giá bậc 3 về mặt hình học của vật liệu, các

đường bao về hệ số dẫn hiệu dung của vật liệu đẳng hướng nhiều thành phần đã được xây dựng. Trong đó, các giá trị của hệ số dẫn hiệu dung của vật liệu gồm nhiều hình tròn lồng nhau cũng hội tụ trong miền đó. Từ nguyên lý năng lượng cực tiểu, hệ số dẫn hiệu dung được biểu diễn:

$$C^{eff} = C_V - v_c^2 A_1^{-1} v_c \quad (1)$$

Trong đó:

$$v_c = \{u_1(C_1 - C_2), \dots, u_n(C_n - C_2)\}^T, \quad v_c = \left\{ \frac{u_1}{2}, C_1, \frac{u_n}{2}, C_n \right\}^T$$

$$C_V = \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha C_\alpha, \quad C_\alpha = \left(\sum_{\beta=1}^n u_\beta C_\beta \right)^{-1}, \quad A_1^{-1} = [A_{\alpha\beta}^{-1}] \quad (2)$$

$$A_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{J} u_\alpha C_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^n \left[A_{\alpha\gamma}^{-1} - u_\alpha C_\alpha \sum_{\beta=1}^n C_\beta^{-1} A_{\beta\gamma}^{-1} \right] C_\gamma$$

$\delta_{\alpha\beta}$ - Hệ số Kronecker, đánh giá bậc ba; $A_{\alpha\beta}^{-1}$ có giá trị riêng với trường hợp hình tròn lồng nhau ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$):

Với vật liệu 2 thành phần, (1) có dạng:

$$C^{eff} = P(u_1, C_1, C_2) = \left(\frac{u_1}{C_1 + C_2} + \frac{u_2}{2C_2} \right)^{-1} - C_2 \quad (3)$$

Trong đó: V_1 - Giống như pha cốt, V_2 là pha nền.

Nếu u_2 tiến tới 1 ($u_1 \rightarrow 0$) trong biểu thức (3) hay là trong biểu thức (1) u_2 tiến tới 1 thì kết quả nhận được tương tự trường hợp phân bố thưa của cốt tròn 1 trong pha nền 2 hoặc phân bố thưa của lớp cốt gồm (n-1) hình tròn lồng nhau trong pha nền n.

$$C^{eff} = C_1 + u_2 \frac{(C_1 - C_2) * 2C_2}{C_1 + C_2} + (u_1^2) \quad (4)$$

Trường hợp khi tỉ lệ thể tích pha nền nhỏ $u_2 \ll 1$, công thức (3) được biểu diễn:

$$C^{eff} = C_1 + u_2 \frac{(C_2 - C_1)[C_1 + C_2]}{2C_2} + (u_1^2) \quad (5)$$

3. LỚP VỎ DỊ HƯỚNG VỚI ĐỘ DẪN BIẾN THIÊN

Cốt có bán kính R_c được bao bọc bởi một lớp vỏ mỏng có tỉ lệ thể tích $\Delta u \ll 1$. Chia lớp vỏ đó thành 02m lớp vỏ cùng mỏng với tỉ lệ thể tích $\Delta u/2m$, hệ số dẫn luân phiên C_V, C_V .

Khi thực hiện đồng nhất hóa cốt và lớp vỏ bọc, sử dụng công thức (3) ta nhận được tiềm căn của hệ số dẫn hiệu dung của cốt được bọc nhiều lớp:

$$\begin{aligned} C^{eff} &= C_1 + \frac{\Delta u}{2m} \left[m \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + C_2)}{2C_2} \right]_p + m \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + C_2)}{2C_2} \left[\frac{\Delta u}{2} \right] \\ &= C_1 + \frac{\Delta u}{2C_2} [C_2 - C_1] * (\Delta u)^2 \\ &= C_1 + \frac{\Delta u}{2C_2} [C_2 - C_1](C_1 + C_2) * (\Delta u)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Với:

$$C_V = \frac{1}{2}(C_2 + C_1), C_N = 2(C_2^{-1} + C_1^{-1})^{-1} \quad (7)$$

$$C_V = \sqrt{C_1 C_2} \quad (8)$$

Cho $m \rightarrow \infty$, ta được công thức có hiệu của lớp vỏ bọc dị hướng có hệ số dẫn biến thiên theo phương pháp tuyến C_N và phương vuông góc C_V . Các hệ số dẫn này có thể là hàm của bán kính $C_N(r), C_V(r)$ hoặc biến đổi theo tỉ lệ thể tích của lớp vỏ bọc $C_N(u), C_V(u)$.

Sử dụng phương pháp xấp xỉ vi phân xác định hệ số dẫn hiệu dung của cốt được bọc với cốt có hệ số dẫn C_V ,

tỉ lệ thể tích u_V , lớp vỏ bọc dị hướng hệ số dẫn $C_N(u), C_V(u)$, tỉ lệ thể tích u_C .

$$\frac{dC}{dV} = \frac{1}{1-u} \left(\frac{C_V - C}{2C_V} \right) (C + C_V) \quad (9)$$

$$C(0) = C_1, \quad C^{eff} = C(u_C)$$

Trong đó: C_V được xác định theo công thức (8). Trường hợp $C_N = \text{const}$, $C_V = \text{const}$ từ phương trình (9):

$$\int_{C_1}^C \left[\frac{2C}{C_V + C} + \frac{2C}{C_V - C} \right] = \frac{C_V}{2C_V} \int_{u_1}^{u_2} \frac{dV}{1-u} = \ln \frac{(C^{eff} + C_V)(C_1 - C_1)}{(C_1 + C_V)(C_1 - C^{eff})} = \frac{C_V}{C_V} \ln \frac{1}{u_1} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(C^{eff} + C_V)(C_1 - C_1)}{(C_1 + C_V)(C_1 - C^{eff})} = \left(\frac{1}{u_1} \right)^{\frac{C_V + C_1}{2C_V}} \\ &= C^{eff} = C_1 - \frac{C_V(C_1 - C_1) + C_1(C_1 + C_V)(\frac{C}{C_1})^{\frac{C_V + C_1}{2C_V}}}{(C_1 - C_1) + (C_1 + C_V)(\frac{C}{C_1})^{\frac{C_V + C_1}{2C_V}}}, \quad u_1 = \frac{u_2}{u_1 + u_2} \end{aligned} \quad (11)$$

Giá trị C^{eff} nhận được từ công thức (11) chính là hệ số dẫn hiệu dung của cốt được bọc, với cốt có hệ số dẫn C_V , tỉ lệ thể tích u_V và lớp vỏ bọc dị hướng với hệ số dẫn C_N, C_V là hằng số.

Nếu hệ số dẫn là hàm của bán kính $C_N = C_N(r), C_V = C_V(r)$, từ phương trình (9) có:

$$\frac{dC}{dr} = \frac{C_V(r)C_V(r) - C^2}{rC_N(r)} \quad (12)$$

$$C(R_1) = C_1, \quad C^{eff} = C(R_c)$$

Với R_1 là bán kính của cốt, R_c là bán kính của lớp vỏ ngoài cùng. Lấy tích phân phương trình (12) sẽ xác định được hệ số dẫn hiệu dung $C^{eff} = C^{IC} = C(R_c)$ của cốt hình cầu được bọc với lớp vỏ bọc có hệ số dẫn biến thiên theo bán kính $C_N(r), C_V(r)$ bọc lớp cốt có hệ số dẫn C_1 , tỉ lệ thể tích u_V .

Nếu cốt được bọc có hệ số dẫn C^{IC} , tỉ lệ thể tích $u_{IC} (u_{IC} = u_1 + u_C)$ đặt trong pha nền có hệ số dẫn C_N , tỷ lệ thể tích $u_N (u_N = 1 - u_{IC})$, thay thế vào công thức (3) ta nhận được hệ số dẫn hữu hiệu C^{ICM} của vật liệu.

$$C^{eff} = C^{ICM} = P(u_{IC}, C^{IC}, C_N) = \left(\frac{u_{IC}}{C^{IC} + C_N} + \frac{1 - u_{IC}}{2C_N} \right)^{-1} - C_N \quad (13)$$

Với C^{IC} xác định theo công thức (11) hoặc (12).

Cho $u_{IC} \ll 1$, giống như công thức (5), chúng ta có được kết quả biểu diễn của phân bố thưa của cốt tròn được bọc trong pha nền liên tục.

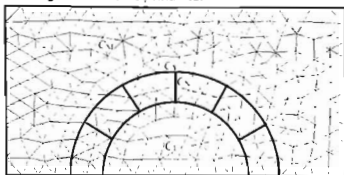
$$C^{eff} = C_N + u_{IC} \frac{(C^{IC} - C_N) * 2C_N}{C^{IC} + C_N} \quad (14)$$

4. PHƯƠNG PHÁP SỐ

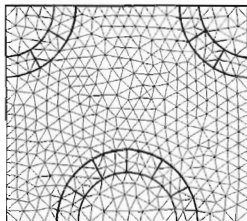
Phương pháp số sử dụng phần tử hữu hạn áp dụng cho việc tính hệ số dẫn ngang hiệu dụng của vật liệu composite cốt sợi đồng phương với giả thiết vật liệu tuần hoàn, nhân tử tuần hoàn hình vuông hoặc hình lục giác có cốt tròn hệ số dẫn C_V, r tỉ lệ thể tích u_V , lớp vỏ bọc dị hướng với hệ số dẫn C_N, C_V là hằng số đặt trong pha nền liên tục hệ số dẫn C_N , tỷ lệ thể tích u_N (Hình 4.1) dưới sự hỗ trợ của phần mềm CAST3M.

Trình tự tính toán theo phương pháp số như sau:

- Tạo nhân tử tuần hoàn: Lớp vỏ bọc dị hướng dạng hình vành khăn, chia thành nhiều hình nhỏ. Chọn phần tử tam giác cho toàn bộ nhân tử.



a)



b)

Hình 4.1: (a) - 1/2 nhân tử tuần hoàn hình vuông; (b) - 1/2 nhân tử tuần hoàn hình lục giác

- Đưa vào các đặc trưng cơ học của vật liệu: Với các pha đồng nhất chỉ có 1 hệ số dẫn. Lớp vỏ bọc có hệ số theo phương pháp tuyến (x_1') là C_w phương tiếp tuyến (x_2') là C_T . Tuy nhiên, khi tính toán chuyển qua hệ tọa độ (x_1, x_2), nên áp dụng công thức chuyển hệ trục của hệ số dẫn:

$$C = L^T C' L \quad (15)$$

Trong đó: L là ma trận định vị phần tử, được xác định:

$$L = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (16)$$



- Thiết lập các phương trình tính toán, điều kiện tuần hoàn: Theo lý thuyết đồng nhất hóa vật liệu, các tính toán được tính trên phần tử thể tích đặc trưng (Ω). Giả sử đặt lên (Ω) một trường nhiệt độ vi mô có gradient ∇T , vector dòng nhiệt vi mô Q, khi đó hệ số dẫn hiệu dụng được xác định qua định luật Fourier:

$$Q = -C^{eff} \nabla T \quad (17)$$

Ở đây cần hiểu vector dòng nhiệt vi mô Q là trung bình trên toàn miền Ω của các vector dòng nhiệt vi mô:

$$Q = \langle q(z) \rangle_{\Omega} \quad (18)$$

z xác định vị trí của chất điểm trong Ω .

Với nhân tử tuần hoàn hình vuông (U) có cạnh là a, có trường dòng nhiệt vi mô q(z):

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad q(z) = q(z + n_1 a x_1 + n_2 a x_2) \quad (19)$$

Điều kiện tuần hoàn là trung bình của dòng nhiệt vi mô trên miền (U) bằng với trung bình của dòng nhiệt vi mô trên miền (Ω):

$$\langle q(z) \rangle_U = \langle q(z) \rangle_{\Omega} = Q \quad (20)$$

Mối quan hệ giữa Q và ∇T có thể xác định trên miền U, dựa vào các quan hệ sau:

$$\text{div } q(z) = 0 : (U) \quad (21)$$

$$q(z) = -C(z) \nabla T(z) : (U) \quad (22)$$

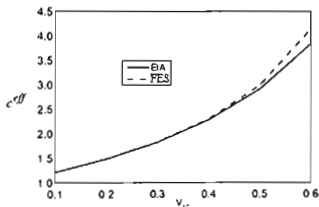
$$T(z) = T_0 + \nabla T \cdot z + T^*(z) : (U) \quad (23)$$

$$T^*(z) \text{ tuần hoàn} : (\partial U) \quad (24)$$

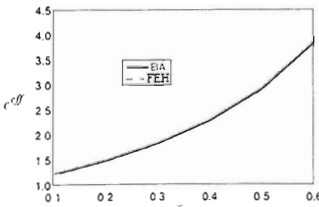
$$(q(z), n) \cdot n : \text{tuần hoàn} : (\partial U) \quad (25)$$

Với $T(z)$, T_0 , $T^*(z)$ lần lượt là trường nhiệt, nhiệt độ ban đầu của vật liệu và trường nhiệt hỗn loạn tuần hoàn gây ra bởi cốt được bọc, n là vector pháp tuyến ngoài trên biên ∂U .

Lấy ví dụ: $C_w = 1, C_T = 100, C_x = 70, C_T = 50, \nu_C = 0, \nu_1$ (tất cả cùng đơn vị W.m⁻¹.K⁻¹). Hệ số dẫn hiệu dụng thay đổi theo tỉ lệ thể tích giữa các pha. Kết quả thể hiện trên Hình 4.2. Với FES: Kết quả số của nhân tử hình vuông, FEH: kết quả của nhân tử hình lục giác, EIA - kết quả xấp xỉ xây dựng được theo công thức (13).



a)



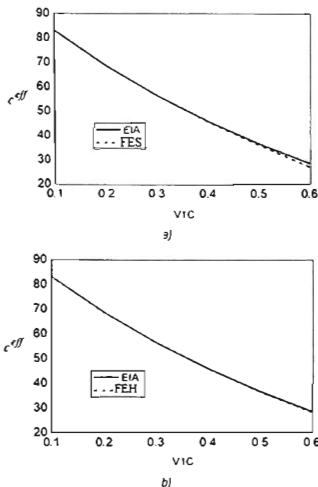
b)

Hình 4.2: Hệ số dẫn ngang hiệu dụng của vật liệu với lớp vỏ bọc dị hướng

Khi $C_w = 1, C_T = 100, C_x = 70, C_T = 50, \nu_C = 0, \nu_1$ - nhân tử hình vuông, b) - nhân tử hình lục giác.

Tương tự, khi $C_w = 100, C_T = 1, C_x = 80, C_T = 60, \nu_C = 0, \nu_1$

thể hiện kết quả của giữa các phương pháp thể hiện trên Hình 4.3.



Hình 4.3: Hệ số dẫn ngang hiệu dụng của vật liệu với lớp vỏ bọc dị hướng

Khi $C_M = 100$, $C_1 = 1$, $C_n = 80$, $C_T = 60$, $v_C = 0.1$.
(a) - nhân tử hình vuông, b) - nhân tử hình lục giác.

Trên Hình 4.2, 4.3 thể hiện kết quả tính theo công thức xấp xỉ cho mô hình nén - cốt tương đương trong công thức (13) rất sát với kết quả số theo phần tử hữu hạn nhất là khi nhân tử tuần hoàn hình lục giác. Còn khi nhân tử tuần hoàn là hình vuông và tỉ lệ thể tích pha cốt lớn hơn 0,5 thì có sai số đáng kể giữa hai phương pháp.

5. KẾT LUẬN

Bài báo có nội dung chính là xác định hệ số dẫn hiệu dụng của vật liệu composite với cốt phức hợp có lớp vỏ bọc dị hướng trong không gian hai chiều theo công thức giải tích với cách tiếp cận cốt tương đương và áp dụng phương pháp số sử dụng phần tử hữu hạn. Kết quả lấy ví dụ trong trường hợp khi pha cốt cứng hơn pha nền hoặc ngược lại pha nền cứng hơn pha cốt cho cả nhân tử hình vuông và lục giác, cho thấy kết quả giữa công thức xấp xỉ theo mô hình nén - cốt tương đương và phương pháp số là rất sát nhau trong trường hợp nhân tử tuần hoàn hình lục giác, còn trong trường hợp nhân tử tuần hoàn hình vuông thì có sai số khi tỉ lệ thể tích lớn hơn 0,5.

Tài liệu tham khảo

[1]. R. Hill (1964), *Theory of mechanical properties of*

fiber-strengthened materials: I. Elastic behaviour, J. Mech. Phys. Solids, 12, 199.

[2]. B. Paule (1960), *Prediction of elastic constants of multiphase materials*, Trans. ASME, 218, 36.

[3]. Z. Hashin, S. Shtrickman (1962), *A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials*, J. Appl. Phys., 33, 3125-3131.

[4]. A. N. Norris (1985), *A differential scheme for effective moduli of composites*, Mechanics of Materials, 4, 1-16.

[5]. R. M. Christensen, & F. M. Waals (1972), *Effective stiffness of randomly oriented fiber composites*, Journal of Composite Materials, 6, 518-532.

[6]. T. Mori, & K. Tanaka (1973), *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, Acta Metallurgica, 21, 571-574.

[7]. Bao-Viet Tran, Duc-Chinh Pham, Thi-Huong-Giang Nguyen (2017), *Effective medium approximation for conductivity of unidirectional coated-fiber composites*, Computational Thermal Sciences, 9(1), 63-76.

[8]. Trần Bảo Việt, Nguyễn Thị Hương Giang, Hệ số dẫn ngang vật liệu cốt sợi dọc đa cốt liệu phức hợp, Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc Đà Nẵng, 03-05/8/2015, 328-333.

Ngày nhận bài: 05/12/2019

Ngày chấp nhận đăng: 10/01/2020

Người phản biện: TS. Vũ Thị Hương Giang
TS. Vũ Lâm Đông