TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 17, Số 2 (2020): 211-221

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 17, No. 2 (2020): 211-221

ISSN: 1859-3100

Website: http://journal.hcmue.edu.vn

Bài báo nghiên cứu

HAI MẶT TÁC ĐỘNG BIỆN CHỨNG CỦA QUÁ TRÌNH PHÁT TRIỂN KHÁI NIỆM TOÁN HỌC: TRƯỜNG HỢP HÀM SỐ MŨ

Nguyễn Hữu Lợi[1*], Trần Lương Công Khanh[2]

[1]*Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh*

[2]*Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Bình Thuận*

[*]*Tác giả liên hệ: Nguyễn Hữu Lợi – Email: loinh999@yahoo.com*

Ngày nhận bài: 20-8-2019; ngày nhận bài sửa: 26-9-2019; ngày duyệt đăng: 19-02-2020

TÓM TẮT

Hàm số mũ có nhiều ứng dụng trong đời sống, khoa học kĩ thuật. Quá trình phát sinh và hình thành hàm số mũ xuất phát từ nhu cầu trong cuộc sống con người. Khi hoàn thiện, hàm số mũ đã tác động, thúc đẩy đến các lĩnh vực của cuộc sống và toán học. Bài báo chỉ ra nguồn gốc phát sinh hàm số mũ từ nhu cầu tính lãi suất của người Babylon. Vấn đề này được các nhà toán học nghiên cứu xây dựng nên hàm số mũ. Khi chính thức ra đời, hàm số mũ tác động đến nhiều lĩnh vực khoa học kĩ thuật và toán học, trong đó việc biểu diễn và dự báo hành vi trong tương lai các hiện tượng có sự thay đổi theo thời gian là những bài toán đặc trưng của hàm số mũ. Hàm số mũ là một minh chứng về hai mặt tác động biện chứng trong quá trình phát triển khái niệm toán học[1].

Từ khóa: hàm số mũ; lũy thừa; khái niệm toán học; lãi suất; tác động biện chứng; tăng trưởng dân số; phương trình mũ

1. Sự hình thành và phát triển hàm số mũ

1.1 Nhu cầu nảy sinh hàm số mũ

Từ trước khi có hàm số mũ đã xuất hiện các nhu cầu tính toán cho các hiện tượng mang tính chất tăng theo cấp số nhân để từ đó quy luật mũ (quy luật tăng, giảm về số lượng theo thời gian) cũng dần được hình thành theo sự hiểu biết của con người và trở thành mầm mống cho sự xuất hiện hàm số mũ sau này. Nghiên cứu của Lorenzo (1978) cho thấy, trước thế kỉ XVII các tính toán về sự tăng trưởng, phân rã đã xuất hiện khái niệm toán học trừu tượng. Theo đó, xuất hiện quy luật mũ là quy tắc tương ứng một-một giữa một cấp số cộng với một cấp số nhân.

Cite this article as: Nguyen Huu Loi, & Tran Luong Cong Khanh (2020). Two aspects of dialectic impact in the development process of a mathematical concept: A case of exponential function. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 17*(2), 211-221.

[1] Được hiểu theo nghĩa là do nhu cầu cuộc sống con người đã sự tác động thúc đẩy sự phát triển khái niệm toán học, ngược lại sự phát triển của khái niệm toán học đã tác động, thúc đẩy đến các lĩnh vực khác của cuộc sống.

Các khái niệm mũ và kí hiệu đại số thì không phát triển đến thế kỉ XVII. Tuy nhiên các ví dụ vật lí về sự tăng trưởng và phân rã mũ đặt ra khái niệm số cơ sở[2] và được thừa nhận là một khái niệm toán học trừu tượng. Quy luật mũ là quy tắc cụ thể và là một tương ứng một-đối-một giữa một cấp số cộng (phép cộng được lặp lại với cùng một lượng) như: 0, 1, 2, 3, 4... với một cấp số nhân (phép nhân được lặp lại với cùng một lượng) như 1, 2, 4, 8, 16...

(Lorenzo, 1978, p.896)

Khi nghiên cứu về lịch sử kiến thức toán học ở trường phổ thông, Tran Trung, Nguyen Chien Thang (2013) chỉ ra rằng:

Từ xưa đến nay toán học phát sinh và phát triển do những nhu cầu thực tế của đời sống con người và do cả nhu cầu của bản thân nó. Mỗi cuộc cách mạng khoa học kĩ thuật đều gây ra những biến đổi sâu sắc trong toán học và ngược lại những biến đổi này càng tác động mạnh mẽ đến khoa học kĩ thuật. (Tran, & Nguyen, 2013, p.7)

Ở đây, nhận thấy hàm số mũ là trường hợp cụ thể của nhận xét trên. Thật vậy, hàm số mũ có nguồn gốc từ nhu cầu con người. Cụ thể, về nhu cầu tính toán lãi suất trong cuộc sống hàng ngày của con người. Trong một hiện vật khảo cổ niên đại 2000 TCN (Hình 1) cho thấy người Babylon đặt ra bài toán về lãi suất kép trong đó phải tính số năm cần thiết để có số tiền gấp đôi ban đầu với lãi suất là 20% năm. Nội dung của hiện vật khảo cổ được Florian Cajori (1913) mô tả như sau:

Với tỉ lệ lãi kép là 20% năm thì phải mất thời gian bao lâu để có được số tiền gấp đôi số tiền ban đầu?. Điều này đã dẫn đến việc sử dụng một bảng về số $(6/5)^n$ và với phép nội suy tuyến tính giữa 3 và 4 để cho đáp số là 3 năm 9 tháng và 4/9 tháng. Như vậy, trong một nghĩa nào đó đã chứng tỏ việc giải quyết có thể hiện yếu tố cơ bản về mũ. (Florian, 1913, p.87)

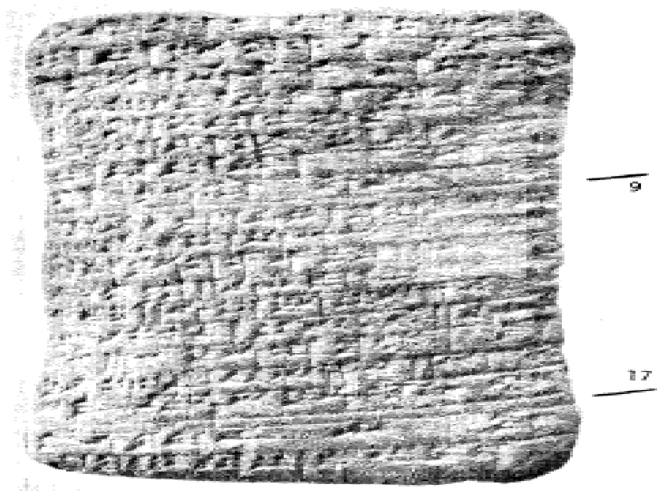

Fig. 1. Louvre cuneiform AO 6770 from about 2000 B.C. On lines 9 and 10 the question is posed "How long does it take for an amount invested at 20% annually compounded interest to double itself?" Lines 11 – 14 describe a linear interpolation between the 3-yr and 4-yr compounded totals, line 15 gives the number 2 plus 33/60 plus $20/60^2$, and lines 16 and 17 explain that this is the number of months short of 4 yr at which the doubling occurs.

Hình 1. *Hiện vật khảo cổ*

---

[2] Tạm dịch từ "basic number concept"

Bài toán trên cho thấy có nhu cầu về hàm số mũ bằng một bảng tương ứng giữa số năm và số tiền thu được mà biểu thức hàm để tính là một biểu thức lũy thừa $(6/5)^n$. Mặc dù, khái niệm lũy thừa với số mũ hữu tỉ chưa được định nghĩa, nhưng với kết quả tính được là 3 năm 9 tháng và 4/9 tháng hay $3+\frac{9}{12}+\frac{4}{9}.\frac{1}{12}$=3,787 năm như trên đã chứng tỏ có nhu cầu cho sự xuất hiện lũy thừa với số mũ hữu tỉ dương "3 năm 9 tháng và 4/9 tháng". nhằm phục vụ cho cuộc sống con người. Những nghiên cứu khác cũng cho thấy các ý tưởng để hình thành hàm số mũ cũng có rất sớm do nhu cầu thực tế cuộc sống. Công trình toán học Almagest của Ptolemy (100-170) chỉ ra nhiều ví dụ về các bảng biểu diễn quan hệ hàm giữa các tập hợp số lượng. Trong đó, nhiều ví dụ cho thấy "Người Babylon trước đó đã tạo ra nhiều bảng tương ứng về bình phương, cũng như trong thiên văn học có những bảng dự đoán về thời gian xuất hiện các hiện tượng của các thiên thể khác nhau." (Victor, 2009, p.156).

Từ các nhu cầu để xuất hiện hàm số mũ này đã được các nhà nghiên cứu xây dựng và phát triển. Cụ thể, từ khái niệm lũy thừa với số mũ hữu tỉ dương được mở rộng đến lũy thừa với số mũ hữu tỉ âm và 0. Để đáp ứng nhu cầu của bản thân toán học, khái niệm lũy thừa với số mũ hữu tỉ được mở rộng hơn với số mũ vô tỉ, bất kì, để rồi sau đó hàm số $y = a^x$ xác định trên R được ra đời, gọi là hàm số mũ. Những nghiên cứu này sẽ được làm rõ trong phần tiếp theo ngay sau đây của bài báo.

1.2. Những nghiên cứu và phát triển hàm số mũ

Dường như những yêu cầu đặt ra ở trên đã trở thành vấn đề nghiên cứu cho các nhà khoa học. Trước hết, các kí hiệu biểu diễn cho lũy thừa được quan tâm nghiên cứu. Thế kỉ XIV, XV có các kí hiệu như: Nicole Oresme sử dụng lũy thừa phân số để biểu diễn cho căn, Chuquet sử dụng lũy thừa âm để biểu diễn cho nghịch đảo và lũy thừa "0" biểu diễn cho 1. (Lorenzo, 1978, p.900)

Kí hiệu rõ nhất như ngày nay là một chỉ số phía trên bên phải do René Descartes công bố trong tác phẩm La Gkomktrie năm 1637, tuy nhiên là lũy thừa với số mũ nguyên, biểu diễn cho phép nhân liên tiếp. Sau đó, các kí hiệu lũy thừa với số mũ âm, phân số được nhanh chóng thêm vào bộ kí hiệu của Descartes nhờ Wallis, Newton và một số người khác. (Lorenzo, 1978, p.900)

Ở một nghiên cứu khác cho rằng, việc mở rộng khái niệm số mũ của lũy thừa với mục đích tìm tòi phương pháp và các công cụ tính toán, việc mở rộng cho đầy đủ khái niệm lũy thừa. (Nguyen, 2011, p.9)

Dù với mục đích nào, những nghiên cứu ban đầu đã tạo cơ sở hình thành hàm số mũ hoàn thiện như ngày nay. Các nghiên cứu về lũy thừa được tiếp diễn sâu hơn, mở rộng hơn bởi các nhà khoa học tiếp theo. Trong đó, nhận thấy có sự nghiên cứu mở rộng khái niệm lũy thừa từ số mũ nguyên dương sang số mũ nguyên âm và phân số như:

Năm 1656, Wallis sử dụng số mũ nguyên dương và công bố các "chỉ số" âm và phân số. Tuy nhiên ông không thật sự viết a^{-1} cho $\frac{1}{a}$, $a^{\frac{3}{2}}$ cho $\sqrt{a^3}$. Ông nói dãy $\frac{1}{\sqrt{1}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},...$ có "chỉ số $-\frac{1}{2}$". (Hong Duc Publisher, 2016, p.354-355)

Và sự mở rộng lũy thừa với số mũ ảo "được đưa ra bởi L. Euler trong một bức thư gửi Johann Bernoulli vào ngày 18 tháng 10 năm 1740, trong đó ông thông báo việc khám phá ra công thức $e^{+x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}=2\cos x$" (Florian Cajori, 1993, p.356). Sau đó, trong tác phẩm *Miscellanea Berolinensia* năm 1743 của Euler có sự hiện diện công thức $e^{+v\sqrt{-1}}=\cos v+\sqrt{-1}\sin v$ (Florian Cajori, 1993, p.356)[3].

Ở một hướng khác, hàm số mũ được phát hiện gián tiếp thông qua những nghiên cứu có liên quan. Trong một trường hợp ghi nhận được cho thấy hàm số mũ (hoặc ít nhất là một số thuộc tính của hàm số mũ) được phát hiện thông qua quỹ tích dựng hình trong hình học. Mặc dù "sự phát triển của khái niệm hàm số mũ và hàm số logarit không xảy ra như một kết quả kéo theo" giữa hai hàm, "nhưng chúng có liên quan đến vấn đề hình học trong việc biểu diễn hình trong dựng hình quỹ tích" (Lorenzo, 1978, p.900). Năm 1639, Descartes đã nhận biết được một số thuộc tính của một hình mà bây giờ gọi là đường cong mũ. Các thuộc tính này được tiếp tục nghiên cứu sau đó bởi Evangelista Torricelli.

> Các thuộc tính hình học của đường cong mũ có lẽ được nghiên cứu đầu tiên bởi Evangelista Torricelli vào khoảng năm 1644 nhưng thuật ngữ "exponential" là không đi kèm với đường cong này trong thời gian dài sau đó. (Lorenzo, 1978, p.900)

Đến nửa sau thế kỉ XIX lũy thừa a^{α} (với $a > 0$ và α vô tỉ) mới chính thức được định nghĩa bởi giới hạn chung của tất cả các dãy $\left(a^{r_n}\right)$ và $\left(a^{s_n}\right)$ với (r_n) và (s_n) là hai dãy hữu tỉ hội tụ tăng và hội tụ giảm đến α. Các cơ sở toán học của định nghĩa này là khái niệm giới hạn và nguyên lí Cantor về dãy các đoạn lồng vào nhau và thắt lại: Nếu $[a_n, b_n]$ là dãy các đoạn thỏa $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$ thì tồn tại duy nhất một số thực α thỏa $\alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$. Khi khái niệm lũy thừa đã được định nghĩa hoàn thiện, đồng thời đã có định nghĩa về hàm số, từ đó hàm số mũ được hình thành qua biểu thức $y=a^x$. Như vậy, về kết quả hàm số mũ là hàm số ngược của hàm số logarit được xem là một hệ quả về mối quan hệ của chúng.

[3] Các kí hiệu trong công thức là giữ nguyên theo tài liệu

Khi chính thức ra đời, ngoài đáp ứng những yêu cầu đặt ra ban đầu, hàm số mũ đã phát huy những ảnh hưởng của mình đối với sự phát triển những lĩnh vực khác, trong đó có cả lĩnh vực toán học. Phần tiếp theo sau đây sẽ đề cập những ảnh hưởng trên của hàm số mũ.

2. Những tác động của hàm số mũ đối với các lĩnh vực

2.1. Đối với lĩnh vực toán học

2.1.1. Phương trình vi phân

Do hàm số mũ có tính chất rất đặc biệt $y' = ky$ với k là hằng số. Vì vậy, hàm số mũ là một nghiệm của phương trình vi phân $y' = ky$. Phương trình này có nghiệm khác là $y(t) = Ce^{kt}$, trong đó C là hằng số, t là biến, thuộc dạng nghiệm $y(t) = y(0)e^{kt}$. Phương trình vi phân có vai trò, vị trí quan trọng trong toán học cũng như khoa học kĩ thuật.

Phương trình vi phân được dùng để mô hình hóa những hiện tượng trong tự nhiên có sự thay đổi đang diễn ra để dự đoán diễn biến của nó trong tương lai. Khi đó, một hiện tượng trong tự nhiên được mô hình hóa toán học thỏa mãn phương trình vi phân cấp một $y' = ky$ cho thấy rằng tốc độ thay đổi tỉ lệ thuận với quy mô ban đầu của nó. Trong đó, một số hiện tượng quen thuộc được biết như hiện tượng tăng trưởng dân số, tăng trưởng số cá thể (vi khuẩn, sinh vật) trong một quần thể, phân rã của chất phóng xạ, tốc độ phản ứng hóa học tỉ lệ với nồng độ chất trong phản ứng đó, sự giảm nhiệt của vật thể so với môi trường xung quanh, lãi suất kép tỉ lệ với số tiền gửi vào… Hay hàm số mũ có vai trò biểu diễn và dự báo hành vi trong tương lai các hiện tượng có sự thay đổi theo thời gian. Các hiện tượng này được mô hình hóa để khai thác ứng dụng trong thực tiễn. Trong phạm vi bài báo, ở phần sau chúng tôi chọn lọc và trình bày một số mô hình, đặc biệt là các mô hình ứng dụng trong đời sống hằng ngày của con người cũng như các mô hình có liên quan đến chương trình dạy học ở nhà trường. Ngoài ra, hàm số mũ có vai trò, vị trí đặc biệt quan trọng trong nhiều lĩnh vực bởi sự hiện diện của nó trong nhiều biểu thức nghiệm phương trình vi phân các cấp biểu diễn sự thay đổi trạng thái của các sự vật, hiện tượng.

2.1.2. Phương trình mũ

Đây là phương trình với sự hiện diện của biểu thức hàm mũ a^x. Phương trình được sử dụng giải quyết nhiều vấn đề trong toán học và ứng dụng giải quyết các bài toán trong khoa học kĩ thuật như khảo cổ học, tài chính, các hiện tượng tăng giảm tự nhiên.

Phương trình đơn giản nhất có dạng $A = A_0e^x$ giúp tìm các đại lượng chưa biết trong các lĩnh vực như: khảo cổ học, tài chính, dân số và nhiều hiện tượng khác trong khoa học kĩ thuật. Ví dụ, với một yêu cầu: "Mất bao lâu một vốn đầu tư sẽ gấp đôi giá trị của nó nếu lãi suất là 6%/năm ghép lãi suất liên tục?" sẽ cần đến phương trình mũ "$M = M_0e^{0,06t}$" để giải. (Bui, 2011, p.453)

Những phương trình mũ "mở rộng" phức tạp hơn, dạng những biểu thức có các phần tử lũy thừa được kết nối với nhau bởi các phép toán. Những phương trình này có nhiều ứng dụng trong khoa học kĩ thuật.

Ví dụ sau đây:

> Hệ số giá trị hiện tại của chuỗi tiền kép tăng dần phát sinh cuối kì chính là giá trị hiện tại vào thời điểm 0 của một chuỗi tiền gồm các khoản tiền 1$ phát sinh vào cuối năm thứ nhất, các khoản tiền sau đó sẽ tăng dần e% mỗi năm cho đến khoản tiền cuối cùng là $(1+e)^{n-1}$ $ phát sinh vào năm thứ n. (Bui, 2011, p.107)

sử dụng đến phương trình phương trình $\frac{1}{1+e}a_{\overline{n|}j}=\frac{1}{e}\left[\frac{1-(1+j)^{-n}}{j}\right]$ trong đó $j=\frac{i-e}{1+e}$ (phương trình được xây dựng bởi (Bùi Phúc Trung, 2011, p.107) để giải.

Có những phương trình mũ "mở rộng" đặc biệt, có nhiều ứng dụng và được mang tên riêng. Chẳng hạn công thức hyperbol $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ sẽ trở nên phương trình ẩn x khi vế trái là hằng số, được sử dụng trong khoa học kĩ thuật cho các hiện tượng phân rã, hấp thụ.

> Hàm hyperbol được ứng dụng vào khoa học và kĩ thuật bất cứ khi nào một đại lượng như ánh sáng, vận tốc, điện hoặc phóng xạ được hấp thụ hoặc bị phân rã dần dần, vì sự phân rã có thể được biểu diễn bởi các hàm hyperbol. (James Stewart, 2010, p. 463)

2.1.3. Các bài toán có liên quan đến lũy thừa

Hàm số mũ có nhiều định nghĩa khác nhau, trong đó định nghĩa thể hiện quá trình phát sinh và phát triển của hàm số mũ là $y=a^x,\quad 0<a\neq 1$. Với định nghĩa này, ngoài vai trò là một hàm số, biểu thức a^x còn có vai trò của một lũy thừa. Khi đó, với x là số nguyên dương, biểu thức a^x biểu thị cho sự nhân lặp đi lặp lại của cùng một số $a^x=\underbrace{a...a}_{x\ lan}$ và đã giúp cho việc biểu diễn các số lớn rất thuận lợi dưới dạng dạng lũy thừa. Cũng với nghĩa là một lũy thừa, biểu thức x^n ($x^n=f_x(n)$: họ các hàm số mũ xác định trên N) là thành phần tạo nên các chuỗi lũy thừa, chuỗi Taylor – Maclaurin hay các phương trình đa thức, phương trình đường cong. Những lí thuyết này làm thành phần góp phần thúc đẩy sự phát triển khoa học kĩ thuật, trong đó có cả trong toán học. Sự thể hiện của lũy thừa x^n trong các bài toán này như sau:

- ***Chuỗi lũy thừa***

Biểu thức x^n hiện diện trong chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...$ Đây là một biểu thức hàm của một hàm số được biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa. Sự xuất hiện của hàm số dạng này giúp giải quyết nhiều bài toán trong vật lí, hóa học và cả chính toán học. Chẳng hạn, trong vật lí hàm Bessel $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ được sử dụng để biểu diễn các hiện tượng tự nhiên, trong đó Kepler sử dụng trong giải phương trình mô tả sự chuyển động của hành tinh.

Ngoài ra, việc biểu diễn hàm số bởi chuỗi lũy thừa đã mở ra cánh cửa mới cho việc lấy tích phân của những hàm số không có nguyên hàm sơ cấp, giải các phương trình vi phân, và xấp xỉ các hàm số bằng đa thức.

- ***Chuỗi Taylor – Maclaurin***

Đây là trường hợp đặc biệt của chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm số. Chuỗi Taylor – Maclaurin $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ đã giúp toán học mở rộng hơn nữa phạm vi các hàm số lấy tích phân mà trước đây các hàm này chúng ta chưa tính được. Chẳng hạn hàm số $f(x)=e^{-x^2}$ không lấy tích phân được bằng các phương pháp mà chúng ta đã biết đến nay, bởi vì nguyên hàm của nó không phải là một hàm sơ cấp.

Ngoài việc mở rộng phạm vi các hàm số lấy tích phân, chuỗi Taylor – Maclaurin còn dùng cho tính xấp xỉ hàm số – một phương pháp mà các nhà khoa học máy tính thích chúng bởi vì đa thức là các hàm số đơn giản nhất; sau đó là các nhà vật lí học, kĩ sư sử dụng phương pháp này trong các lĩnh vực như lí thuyết tương đối, quang học, bức xạ vật đen, lưỡng cực điện, vận tốc sóng nước... bởi các phương trình biểu diễn các lĩnh vực này là rất phức tạp.

2.1.4. Đối với định nghĩa hàm logarit

Phân tích trên cho thấy hàm số mũ nảy sinh và phát triển độc lập với hàm số logarit nhau. Kết quả hàm số ngược nhau giữa hàm số mũ và hàm số logarit là một hệ quả về mối quan hệ giữa chúng. Điều này thể hiện vai trò nhất định của hàm số mũ đối với việc định nghĩa hàm số logarit cũng như các bài toán liên quan như giải các phương trình logarit.

2.2. *Đối với lĩnh vực khoa học kĩ thuật*

Phần này sẽ trình bày những ảnh hưởng của hàm số mũ trong lĩnh khoa học kĩ thuật. Cụ thể, các tính chất của hàm số mũ được khai thác để ứng dụng trong nhiều bài toán quan trọng của khoa học kĩ thuật, đặc biệt là mô hình về các hiện tượng có tính tăng, giảm sau đây.

Mô hình hóa về các hiện tượng liên quan hàm số mũ:

Hàm số mũ được phát huy tốt trong lĩnh vực khoa học kĩ thuật, trong đó mô hình hóa các hiện có tính tăng trưởng (suy giảm) trong tự nhiên là chủ đề đặc trưng cho hàm số mũ. Như trên cho thấy, hàm số mũ là nghiệm phương trình vi phân cấp một $y'=ky$ được dùng biểu diễn và dự đoán các hiện tượng có sự thay đổi theo thời gian. Mặt khác, đạo hàm y' có ý nghĩa biểu diễn cho tốc độ của sự thay đổi và vì $y'=ky$ nên tốc độ này tỉ lệ với quy mô của hiện tượng. Đây là yếu tố đặc biệt của hàm số mũ và vô cùng hữu ích cho việc mô hình hóa toán học các hiện trong tự nhiên có tính tăng trưởng (suy giảm) theo thời gian.

Mô hình hóa hiện tượng tăng trưởng dân số

Tốc độ tăng trưởng tương đối:

Gọi P(t) là dân số vào thời điểm t, ta có $\frac{dP}{dt} = kP$ hay $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$

Đại lượng $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ (tốc độ tăng trưởng chia cho quy mô dân số) gọi là tốc độ tăng trưởng tương đối.

Các tính chất trên được sử dụng để xây dựng mô hình hóa toán học cho hiện tượng tăng trưởng dân số với các số liệu trong ví dụ chúng tôi lượt trích trong (James Stewart, 2010, p. 447) như sau:

Ví dụ: Sử dụng dữ liệu dân số thế giới là 2560 triệu người vào năm 1950 và 3040 triệu người vào năm 1960 để mô hình hóa dân số của thế giới vào nửa sau của thế kỉ XX (Giả sử rằng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉ lệ với quy mô của dân số). Tốc độ tăng trưởng tương đối là bao nhiêu? Sử dụng mô hình để ước tính dân số thế giới vào năm 1993 và dự đoán dân số vào năm 2020.

Giải:

Gọi t là thời gian tính theo năm và t=0 vào năm 1950.

Gọi P(t) là dân số tính theo triệu người

Ta có: P(0)=2560 và P(10)=3040

Theo giả thiết ta có: $\frac{dP}{dt} = kP$

Do đó: $P(t) = P(0)e^{kt} = 2560e^{kt}$

$P(10) = 2560e^{10k} = 3040$

$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560} \simeq 0,017185$

Tốc độ tăng trưởng tương đối là 1,7%/năm và mô hình hóa sự tăng trưởng này là $P(t) \simeq 2560e^{0,017185t}$

Ước tính dân số thế giới vào năm 1993 là

$P(43) \simeq 2560e^{0,017185(43)} \simeq 5360$ triệu

Dự đoán dân số vào năm 2020 sẽ là

$P(70) \simeq 2560e^{0,017185(70)} \simeq 8524$ triệu.

Mô hình hóa trên dựa trên giả định rằng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉ lệ với quy mô của dân số ($\frac{dP}{dt} = kP$). Tiếp theo cần xem xét tính hợp lí trên thực tế của giả định. Thật vậy, giả sử chúng ta có một quần thể (ví dụ vi khuẩn) có quy mô P=1000 và tại một thời điểm nhất định, quần thể này phát triển với tốc độ P'=300 vi khuẩn/ giờ. Giả sử thêm 1000 vi khuẩn cùng loại vào quần thể ban đầu. Cũng như trước, 1000 vi khuẩn mới thêm vào sẽ tăng trưởng với tốc độ 300 vi khuẩn/1 giờ. Chúng ta đoán trước rằng tổng số lượng vi khuẩn 2000 con sẽ gia tăng với tốc độ ban đầu là 600 vi khuẩn/1 giờ (nếu diện tích không gian và điều kiện dinh dưỡng cho phép). Vậy, nếu chúng ta tăng quy mô lên gấp đôi, thì tốc độ tăng trưởng cũng tăng gấp đôi, hay tốc độ tăng trưởng tỉ lệ với quy mô quần thể là điều hợp lí.

Nhiều mô hình hóa toán học khác bởi hàm số mũ cũng được dùng trong kĩ thuật hóa học, vật lí, sinh học như sự phân rã của chất phóng xạ, nồng độ một chất trong phản ứng hóa học, sự giảm nhiệt của vật thể so với môi trường xung quanh… Ví dụ sau đây về mô hình hóa trong kĩ thuật hóa học, sự phân rã (suy giảm) chất phóng xạ, nghĩa vật lí – tốc độ phân rã được thể hiện. Khi đó, lũy thừa với số mũ âm được sử dụng trong mô hình này.

Ta có công thức biểu diễn phân rã phóng xạ là: $m(t) = m_0 e^{kt}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ, m(t) là khối lượng còn lại sau khoảng thời gian t. Các nhà vật lí biểu diễn tốc độ phân rã ($\frac{dm}{dt} = km$, k là hằng số âm) theo chu kì bán rã, là thời gian cần thiết để nửa khối lượng chất được cho phân rã.

Ví dụ: Chu kì bán rã của chất radium-226 là 1590 năm.

a) Một mẫu radium-226 có khối lượng 100mg. Tìm công thức tính khối lượng còn lại của mẫu sau thời gian t năm.
b) Tính khối lượng sau 1000 năm (chính xác đến milligram)
c) Khi nào mẫu phóng xạ chỉ còn 30 mg?

Giải:

a) Công thức tính khối lượng còn lại của mẫu phóng xạ

Gọi m(t) là khối lượng của radium-226 (tính bằng milligram) còn lại sau t năm.

Ta có: $\frac{dm}{dt} = km$, m(0)=100

$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$

Chu kì bán rã là 1590 nên $m(1590) = \frac{1}{2}(100) = 50$

Do đó $100e^{1590k} = 50$

$k = -\frac{\ln 2}{1590}$

Vậy: $m(t) = 100e^{-\frac{\ln 2}{1590}t} = 100.2^{-\frac{t}{1590}}$

b) Khối lượng còn lại sau 1000 năm là $m(1000) = 100.2^{-\frac{1000}{1590}} \simeq 65mg$

c) Thời gian để mẫu phóng xạ còn 30mg là:

$m(t) = 100e^{-\frac{\ln 2}{1590}t} = 30$

$$\Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

$$\Leftrightarrow t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \simeq 2762$$

Vậy thời gian để mẫu phóng xạ còn 30mg là 2762 năm.

Có thể kiểm tra tính hợp lệ của bài toán bằng đồ thị của hàm số $m(t) = 100e^{-\frac{\ln 2}{1590}t}$. Việc vẽ đồ thị này là dễ dàng khi dùng phần mềm máy tính để thực hiện.

(James Stewart, 2010, p.448-449)

Mô hình hóa trên là một ứng dụng của hàm số mũ đối với hiện tượng phân rã (suy giảm theo thời gian). Đây cũng là một tác động của hàm số mũ đến khoa học kĩ thuật, chẳng hạn lĩnh vực khảo cổ học xác định niên đại của vật thể.

3. Kết luận

Phân tích trên đã chỉ ra hàm số mũ phát sinh và hình thành xuất phát từ nhu cầu cuộc sống của con người qua bài toán lãi suất. Bài báo cho thấy, cùng với sự phát triển của toán học và khoa học kĩ thuật, hàm số mũ đã được xây dựng và trở nên một khái niệm toán học hoàn thiện. Bài báo cũng chỉ ra những khả năng đặc biệt của hàm số mũ đã tác động mạnh mẽ, thúc đẩy đến sự phát triển của khoa học kĩ thuật và toán học. Như vậy, hàm số mũ là một trường hợp minh chứng cho hai mặt tác động biện chứng của quá trình phát triển khái niệm toán học mà bài báo chỉ ra.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bui Phuc Trung (2011), *Financial Mathematics Curriculum 1* [*Giao trinh Toan tai chinh 1*]. University of Economics Ho Chi Minh City, Publisher of Statistics.

Florian Cajori (1993). *A history of mathematical notations – Two volumes bound as one*. Dover publications – Inc. New York.

Hong Duc Publisher. (2016*). Calculus Analytics* [*Giai tich Calculus*]. 7th version.

James Stewart (2010). *Calculus Early Transcendentals 7E*. McMaster University and University of Toronto.

Lorenzo, J. C. (1978). Concept of the exponential law prior to 1900. *Am. J. Phys*., *46*(9).

Nguyen Manh Cang (2011). Teaching to expand the concept of power in grade 12 high school (Advanced Board) in view of situation theory. *Scientific Journal of Hanoi University of Education*, *57*(10), 8-13.

Tran Trung, & Nguyen Chien Thang (2013). *History of mathematical knowledge in high school* [*Lich su kien thuc toan hoc o truong pho thong*]. Publisher of Education University, Hanoi.

Victor, J. K. (2009). *A history of mathematics.* Third edition, Pearson Education.

TWO ASPECTS OF DIALECTIC IMPACT IN THE DEVELOPMENT PROCESS OF A MATHEMATICAL CONCEPT: A CASE OF EXPONENTIAL FUNCTION

***Nguyen Huu Loi*[1*]*, Tran Luong Cong Khanh*[2]**

[1]*Department of Education and Training of Ho Chi Minh City*

[2]*Department of Education and Training of Binh Thuan Province*

[*]*Corresponding author: Nguyen Huu Loi – Email: loinh999@yahoo.com*

Received: August 20, 2019; Revised: September 26, 2019; Accepted: February 19, 2020

ABSTRACT

Exponential function has many applications in life, science, and technology. The process of exponential formation and function derives from the needs of human life. When complete, the exponential function has impacted and motivated other areas of life and mathematics. The article discusses the origin of the exponential function, which is from the need to calculate interest rates of the Babylonians. This problem has been built to be exponential function by mathematicians. When it was officially created, the exponential function affected many fields of science, engineering, and mathematics, in which the representation and prediction of future behaviors that change over time are characteristic of exponential functions. The exponential function is an illustration of the two aspects of a dialectic impact in the development of the mathematical concept.

Keywords: exponential function; power; mathematical concepts; interest; dialectical effects; population growth; exponential equations