PHÂN TÍCH MÔĐUN CYCLIC TRONG ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT

Ngô Tấn Phúc[1*], Trần Ngọc Thành[2] và Tăng Võ Nhật Trung[2]

[1]Trường Đại học Đồng Tháp

[2]Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp

[*]Tác giả liên hệ: ntphuc@dthu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 25/02/2020; Ngày nhận chỉnh sửa: 06/4/2020; Ngày duyệt đăng: 18/4/2020

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi mô tả cấu trúc của môđun cyclic trong đại số đường đi Leavitt sinh bởi các phần tử trong đồ thị cảm sinh.

Từ khóa: *Đại số đường đi Leavitt, môđun cyclic, môđun đơn.*

THE DECOMPOSITION OF CYCLIC MODULES IN LEAVITT PATH ALGEBRA

Ngo Tan Phuc[1*], Tran Ngoc Thanh[2], and Tang Vo Nhat Trung[2]

[1]Dong Thap University

[2]Student, Dong Thap University

**Corresponding author: ntphuc@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 25/02/2020; Received in revised form: 06/4/2020; Accepted: 18/4/2020

Abstract

In this paper, we describe the structure of the cyclic module in the Leavitt path algebra generated by elements in the original graph.

Keywords: *Leavitt path algebra, cyclic module, simple module.*

1. Mở đầu

Cho một đồ thị (trực tiếp) E và một trường số $K,$ Abrams và Aranda Pino (2005) đã giới thiệu lớp *đại số đường đi Leavitt* $L_K(E)$ cảm sinh từ đồ thị $E.$ Lớp đại số này là mở rộng của đại số Leavitt $L_K(1,n)$ (Leavitt, 1962). Sau đó, Abrams (2015) đã chỉ ra lí do đại số đường đi Leavitt trở thành một trong những đối tượng được quan tâm không chỉ bởi nhiều nhà đại số mà còn có cả những nhà giải tích.

Trong lý thuyết môđun, người ta quan tâm đến bài toán mô tả cấu trúc của môđun hoặc cấu trúc của môđun con. Theo hướng nghiên cứu này, có hai lớp môđun đóng vai trò nền tảng là môđun đơn và môđun cyclic. Một môđun đơn là môđun không có cấu trúc con thực sự và môđun cyclic là môđun có hệ sinh chỉ gồm một phần tử. Abrams và Aranda Pino (2005) đã đưa ra tiêu chuẩn trên đồ thị E để $L_K(E)$ là môđun đơn. Khi $L_K(E)$ không là môđun đơn, chúng ta có thể mô tả các môđun con đơn của nó hay không? Đây là công việc tương đối phức tạp và để bắt đầu, chúng ta phải xem xét cấu trúc các môđun con cyclic.

Đại số đường đi Leavitt của đồ thị có hướng có tập sinh là tập các đỉnh và các cạnh của đồ thị. Một cách tự nhiên, trong bài viết này chúng tôi mô tả cấu trúc của môđun cyclic trong đại số đường đi Leavitt sinh bởi các cạnh và các đỉnh của đồ thị ban đầu.

2. Đại số đường đi Leavitt và môđun cyclic

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về đồ thị trực tiếp và đại số đường đi Leavitt.

Một đồ thị $E=(E^0,E^1,s,r)$ là một bộ bao gồm hai tập hợp E^0 và E^1 và hai ánh xạ $r,s:E^1\to E^0.$ Các phần tử của E^0 được gọi là các *đỉnh* và các phần tử của E^1 được gọi là các *cạnh*. Đối với mỗi cạnh e trong $E^1,$ $s(e)$ được gọi là *điểm đầu* của e và $r(e)$ được gọi là *điểm cuối* của $e.$ Đồ thị E được gọi là *hữu hạn* nếu các tập E^0 và E^1 là các tập hữu hạn phần tử. Trong bài viết này, ta chỉ xét những đồ thị hữu hạn.

Một *đường đi* trong một đồ thị E là chuỗi các cạnh $p=e_1e_2...e_n$ sao cho

$r(e_i)=s(e_{i+1})$ với mọi $i=1,2,...,n-1.$

Trong đồ thị $E,$ một đỉnh v được gọi là *đỉnh dìm* nếu như $s^{-1}(v)=\varnothing$ và v được gọi là *gốc* nếu như $r^{-1}(v)=\varnothing,$ nếu v không phải là *ngọn* thì được gọi là đỉnh *chính quy*.

Cho một đồ thị trực tiếp $E=(E^0,E^1,s,r)$ và một trường bất kì $K,$ *đại số đường đi Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E với hệ tử trên K là một K-đại số sinh bởi tập E^0 và $E^1,$ cùng với tập cạnh ảo $\{e^*\mid e\in E^1\},$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $v,w\in E^0$ và $e,f\in E^1$:

(1) $vw=\delta_{v,w}w,$ (δ là kí hiệu Kronecker);

(2) $s(e)e=e=er(e)$ và $r(e)e^*=e^*=e^*s(e);$

(3) $e^*f=\delta_{e,f}r(e);$

(4) $v=\sum_{e\in s^{-1}(v)} ee^*$ với mọi đỉnh chính quy $v.$

Cho M là một môđun trên vành R (trong bài viết này, mọi môđun đều được hiểu là môđun trái). Nếu M có hệ sinh chỉ gồm một phần tử thì M được gọi là *môđun cyclic* (trên vành R). Một môđun khác 0 được gọi là *môđun đơn* nếu chỉ có các môđun con tầm thường (là 0 và chính nó).

3. Kết quả chính

Trong phần này, chúng tôi mô tả cấu trúc của môđun cyclic trong đại số đường đi Leavitt sinh bởi các cạnh và các đỉnh của đồ thị ban đầu.

Định lí 1. *Cho* $E=(E^0;E^1,r,s)$ *là đồ thị hữu hạn với* K *là trường bất kì. Khi đó với mọi cạnh* $f\in E^1$ *mà* $\left|s^{-1}\left(r(f)\right)\right|>0,$ *ta có:*

$$fL_K(E)=\bigoplus_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E).$$

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh $\bigcap_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E)=\{0\}$.

Gọi $s^{-1}(r(f))=\{e_1,...,e_n\},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Giả sử $\alpha\in\bigcap_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E)$ suy ra $\exists\beta_1,...,\beta_n\in L_K(E)$ để

$$\alpha=fe_1\beta_1=fe_2\beta_2=...=fe_n\beta_n. \quad (3.1)$$

Nhân f^* vào bên trái, ta có

$$(3.1)\Leftrightarrow e_1\beta_1=...=e_n\beta_n. \quad (3.2)$$

Nhân e_1^* vào bên trái, $(3.2)\Leftrightarrow\beta_1=0=...=0.$

Suy ra $\alpha=0$ hay $\bigcap_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E)=\{0\}$.

Tiếp theo, ta chứng minh

$$fL_K(E)\subset\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E).$$

Lấy bất kỳ $x\in fL_K(E)$ suy ra $\exists\alpha\in L_K(E)$ để

$$\begin{aligned}x&=f.\alpha\\&=f.r(f).\alpha\\&=f.\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} ee^*\alpha\\&=\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} fee^*\alpha\in\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E).\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta chứng minh

$$\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E)\subset fL_K(E).$$

Lấy bất kỳ $x\in\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} feL_K(E)$ suy ra $\exists\alpha_e\in L_K(E)$, $e\in s^{-1}(r(f))$ để

$$\begin{aligned}x&=\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} fe\alpha_e,\ \alpha_e\in L_K(E)\\&=f\left(\sum_{e\in s^{-1}(r(f))} e\alpha_e\right)\in fL_K(E).\end{aligned}$$ □

Định lí 2. *Cho* $E=(E^0,E^1,r,s)$ *là một đồ thị hữu hạn và* K *là một trường. Khi đó với mọi* $v\in E^0$ *không là đỉnh dìm ta có*

$$vL_K(E)\cong\bigoplus_{e\in s^{-1}(v)} r(e)L_K(E).$$

Chứng minh. Xét hai tương ứng

$$\begin{aligned}\varphi:\ vL_K(E)&\to\bigoplus_{e\in s^{-1}(v)} r(e)L_K(E)\\ v\alpha&\mapsto\sum_{e\in s^{-1}(v)} e^*\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi:\ \bigoplus_{e\in s^{-1}(v)} r(e)L_K(E)&\to vL_K(E)\\ \sum_{e\in s^{-1}(v)} r(e)\alpha_e&\mapsto\sum_{e\in s^{-1}(v)} e\alpha_e.\end{aligned}$$

Trước tiên ta chứng minh $\psi\varphi=id_{vL_K(E)}$. Lấy bất kỳ $\alpha\in L_K(E)$ ta có

$$\psi\varphi(v\alpha)=\psi(\varphi(v\alpha))$$

$$=\psi\left(\sum_{e\in s^{-1}(v)} e^*\alpha\right)$$

$$=\psi\left(\sum_{e\in s^{-1}(v)} r(e).e^*\alpha\right)$$ (điều kiện (2) trong định nghĩa)

$$=\sum_{e\in s^{-1}(v)} e.e^*\alpha$$

$=v\alpha$ (điều kiện (4) trong định nghĩa).

Tiếp theo ta chứng minh $\varphi\psi=id_{vL_K(E)}$. Lấy bất kỳ $x=\sum_{e\in s^{-1}(v)} r(e)\alpha_e\in\bigoplus_{e\in s^{-1}(v)} r(e)L_K(E)$

$$\varphi\psi(x)=\varphi(\psi(x))$$

$$=\varphi\left(\sum_{e\in s^{-1}(v)} e\alpha_e\right)$$

$$=\varphi\left(\sum_{e\in s^{-1}(v)} ve.\alpha_e\right)$$ (điều kiện (2) trong định nghĩa)

$$=\sum_{e\in s^{-1}(v)}\varphi(v.e\alpha_e)$$

$$=\sum_{e\in s^{-1}(v)}\sum_{e\in s^{-1}(v)} e^*.e\alpha_e$$

$$=\sum_{e\in s^{-1}(v)} r(e)\alpha_e=x$$ (điều kiện (3) trong định nghĩa).

Ta kiểm tra φ là đồng cấu:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda v\alpha+\mu v\beta)&=\sum_{e\in s^{-1}(v)} e^*(\lambda\alpha+\mu\beta)\\&=\sum_{e\in s^{-1}(v)} e^*\lambda\alpha+e^*\mu\beta\end{aligned}$$

$$= \lambda \sum_{e \in s^{-1}(v)} e^* \alpha + \mu \sum_{e \in s^{-1}(v)} e^* \beta$$
$$= \lambda \varphi(v\alpha) + \mu \varphi(v\beta).$$

Trong đó $\lambda, \mu \in K$ và $\alpha, \beta \in L_K(E)$.

Cuối cùng, ta kiểm tra ψ đồng cấu:

$$\psi(\lambda x + \mu y) = \psi\left(\sum_{e \in s^{-1}(v)} r(e)(\lambda \alpha_e + \mu \beta_e)\right)$$
$$= \sum_{e \in s^{-1}(v)} e(\lambda \alpha_e + \mu \beta_e)$$
$$= \lambda \sum_{e \in s^{-1}(v)} e\alpha_e + \mu \sum_{e \in s^{-1}(v)} e\beta_e$$
$$= \lambda \psi(x) + \mu \psi(y).$$

Trong đó $\lambda, \ \mu \in K$ và

$$x = \sum_{e \in s^{-1}(v)} e\alpha_e, y = \sum_{e \in s^{-1}(v)} e\beta_e. \qquad \square$$

4. Kết luận

Trong trường hợp vành R là một trường, ta dễ thấy mọi môđun cyclic trên R đều là môđun đơn. Nhưng nếu R không là trường thì kết luận trên không còn đúng. Bài viết đã chỉ ra điều đó trong trường hợp đại số đường đi Leavitt.

Lời cảm ơn: Bài báo được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học sinh viên Trường Đại học Đồng Tháp mã số SPD2019.02.11./.

Tài liệu tham khảo

G. Abrams (2015), “Leavitt path algebras: the first decade”, *Bulletin of Mathematical Sciences,* (5), pp. 59-120.

G. Abrams and G. Aranda Pino (2005), “The Leavitt path algebra of a graph”, *Journal of Algebra,* (293), pp. 319-334.

W. G. Leavitt (1962), “The module type of a ring”, *Trans. Amer. Math. Soc,* (42), pp. 113-130.