ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 225(06): 445 - 450

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN TÌM NGHIỆM CÓ CHUẨN NHỎ NHẤT CỦA BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH

Nguyễn Tất Thắng[1*], Vũ Thị Thu Loan[2]
[1]Đại học Thái Nguyên, [2]Trường Đại học Nông Lâm – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Bài toán chấp nhận tách là bài toán tìm phần tử $x* \in C$ sao cho $Ax* \in Q$, ở đây C và Q lần lượt là các tập con lồi đóng khác rỗng của các không gian Hilbert thực $H1$ và $H2$ và A là một toán tử tuyến tính bị chặn từ $H1$ vào $H2$. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một phương pháp lặp giải bài toán tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán chấp nhận tách trong không gian Hilbert thực. Chúng tôi đề xuất một phương pháp lặp mới, dựa trên phương pháp **CQ**, tìm cực trị của hàm khoảng cách trên tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách; đưa ra sự hội tụ của phương pháp và tính toán ví dụ số minh họa trong không gian hữu hạn chiều.
Từ khóa: *Bài toán chấp nhận tách; không gian Hilbert; nghiệm có chuẩn nhỏ nhất; phương pháp lặp; toán tử tuyến tính*

Ngày nhận bài: 21/02/2020; Ngày hoàn thiện: 26/5/2020; Ngày đăng: 29/5/2020

ITERATIVE METHOD FOR SOLVING A MINIMUM NORM SOLUTION OF SPLIT FEASIBILITY PROBLEM

Nguyen Tat Thang[1*], Vu Thi Thu Loan[2]
[1]Thai Nguyen University, [3]TNU - University of Agriculture and Foresty

ABSTRACT

The split feasibility problem is to find a point $x*$ with the property that $x* \in C$ and $Ax* \in Q$, where C and Q are the nonempty closed convex subsets of the real Hilbert spaces $H1$ and $H2$, respectively, and A is a bounded linear operator from $H1$ to $H2$. In this paper, we propose an iterative method to solve the problem of finding the minimum norm solution of the split feasibility problem in real Hilbert space. We propose a new iterative method, based on the **CQ** method, to find the extreme value of the distance function on the set of solutions of the split feasibility problem; consider the convergence of the method and give examples of illustrative numbers infinite-dimensional space.
Keywords: *split feasibility problem; Hilbert space; minimum norm solution; iterative method; linear operator.*

Received: 21/02/2020; Revised: 26/5/2020; Published: 29/5/2020

* Corresponding author. *Email: thangnt@tnu.edu.vn*

1 Giới thiệu

Cho C và Q lần lượt là hai tập con lồi đóng khác rỗng trong các không gian Hilbert thực H_1 và H_2, $A : H_1 \to H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Bài toán chấp nhận tách (Split Feasibility Problem) là bài toán tìm

$$x^* \in C : \quad Ax^* \in Q. \tag{1}$$

Bài toán chấp nhận tách được mô hình hóa từ lớp các bài toán ngược, trong đó các ràng buộc được đặt lên miền xác định của toán tử tuyến tính và miền giá trị của nó trong không gian ảnh. Bài toán chấp nhận tách trong không gian hữu hạn chiều được giới thiệu lần đầu tiên bởi Censor và Elfving [1]. Vào năm 2002, Byrne [2] đã đề xuất thuật toán **CQ** giải bài toán chấp nhận tách trong không gian Hilbert hữu hạn chiều: với $x^0 \in C$ tùy ý, dãy lặp $\{x^k\}$ được xác định bởi

$$x^{k+1} = P_C(x^k + \gamma A^T(P_Q - 1)Ax^k), \quad k \geq 0, \tag{2}$$

trong đó C và Q lần lượt là hai tập con lồi đóng khác rỗng trong R^N và R^M, A là ma trận thực cỡ $M \times N$, A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A, L là giá trị riêng lớn nhất của ma trận A^TA và $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$. Đến năm 2010, Xu [3] đã phát triển thuật toán **CQ** để giải bài toán chấp nhận tách trong không gian Hilbert vô hạn chiều với dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi

$$x^0 \in C, \quad x^{k+1} = P_C(x^k + \gamma A^*(P_Q(Ax^k) - Ax^k)), \quad k \geq 0, \tag{3}$$

trong đó $0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2}$ và A^* là toán tử liên hợp của A, P_C và P_Q lần lượt là phép chiếu mêtric lên C và Q. Giả sử tập nghiệm Ω của bài toán chấp nhận tách (1) khác rỗng, khi đó dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3) hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán chấp nhận tách.

Bài toán chấp nhận tách được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như xử lý tín hiệu (signal processing), khôi phục ảnh (image reconstuction) [4], y học bức xạ trị liệu (intensity-modulated radiation therapy) [5,6] và trong nhiều bài toán khác [7]. Đây cũng chính là lý do lý giải việc bài toán chấp nhận tách được quan tâm và nghiên cứu rộng rãi trong những năm gần đây.

Bài toán tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất là bài toán tìm phần tử $x^* \in C$ sao cho

$$\|x^*\| \leq \|x\| \quad \forall x \in C. \tag{4}$$

Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một phương pháp lặp mới tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán chấp nhận tách trong không gian Hilbert thực, đồng thời đưa ra ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của phương pháp đã đề xuất.

2 Kết quả chính

Mục này đề xuất một phương pháp lặp tìm cực trị của hàm khoảng cách trên tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách trong không gian Hilbert thực:

$$\|x^* - u^0\| = \min_{x \in \Omega} \|x - u^0\|, \tag{5}$$

trong đó $u^0 \in H_1$ và $\Omega = \{x^* \in C,\ Ax^* \in Q\}$, với C và Q là hai tập con lồi đóng trong các không gian Hilbert thực H_1, H_2, $A : H_1 \to H_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn.

Phương pháp 1 Cho C và Q lần lượt là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của các không gian Hilbert thực H_1 và H_2, $A : H_1 \to H_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp A^*. Với $x^0 \in C$ bất kỳ, ta xét dãy lặp $\{x^k\}$ được xác định bởi

$$y^k = P_C[x^k + \delta_k A^*(P_Q(Ax^k) - Ax^k)], \tag{6}$$

$$x^{k+1} = \alpha_k u^0 + (1 - \alpha_k) y^k, \quad k \geq 0, \tag{7}$$

trong đó $\{\delta_k\}$, $\{\alpha_k\}$ là các dãy tham số dương.

Phương pháp 1 được xây dựng dựa trên cơ sở phương pháp lặp trong Định lý 1 của [8] khi cho $F = I$, toán tử đơn vị trong H_1.

Sự hội tụ mạnh của Phương pháp 1 được đưa ra trong định lý dưới đây.

Định lý 2 Cho C và Q lần lượt là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của các không gian Hilbert thực H_1 và H_2, $A : H_1 \to H_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp A^*. Giả sử các dãy tham số $\{\delta_k\}$ và $\{\alpha_k\}$ thỏa mãn các điều kiện

(C1) $\{\delta_k\} \subset [a, b]$ với $a, b \in \left(0, \frac{2}{\|A\|^2+1}\right)$,

(C2) $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$, $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$.

Khi đó dãy $\{x^k\}$ xác định bởi phương pháp lặp (6)-(7) hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán

$$\min\left\{\|x - u^0\| : x \in C,\ Ax \in Q\right\}, \quad u^0 \in C. \tag{8}$$

Việc chứng minh định lý này được làm tương tự như chứng minh Định lý 1 trong [8] khi cho $F = I$, toán tử đơn vị trong không gian Hilbert thực H_1.

Sau đây chúng tôi đưa ra ví dụ số minh họa cho sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (6)-(7). Chương trình thực nghiệm được viết bằng ngôn ngữ MATLAB 7.0 và đã chạy thử nghiệm trên máy tính ASUZ 2.4 GHz, RAM 8 GB.

Các ký hiệu trong bảng kết quả của phần này như sau:

err: Sai số giữa nghiệm đúng và nghiêm xấp xỉ

k: Số bước lặp

Ví dụ 3 Cho $H_1 = \mathbf{R}^4$, $H_2 = \mathbf{R}^2$, toán tử tuyến tính bị chặn $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ cho bởi

$$A(x) = (x_1 - x_2 - x_4, x_2 + x_3 - x_4)^T, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4.$$

Chuẩn của toán tử A là $\sqrt{3}$. Toán tử liên hợp $A^* : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ của A được cho bởi

$$A^*(y) = (y_1, -y_1 + y_2, y_2, -y_1 - y_2)^T, \quad y = (y_1, y_2)^T \in \mathbf{R}^2.$$

Cho hai tập

$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4 :\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1\}$ và $Q = \{(u_1, u_2)^T \in \mathbf{R}^2 :\ u_1 - u_2 = 3\}$.

Khi đó, tập nghiệm Ω của bài toán chấp nhận tách (1) là

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4 :\ x \in C :\ A(x) \in Q\}$$

$$= \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4 :\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, x_1 - 2x_2 - x_3 = 3\}$$

$$= \{(-5\alpha - 1, -3\alpha - 2, \alpha, \beta)^T :\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

1. **Trường hợp $u^0 = (0,0,0,0) \in \mathbf{R}^4$.** Lấy $x = (-5\alpha - 1, -3\alpha - 2, \alpha, \beta) \in \Omega$ bất kỳ, ta có

$$\|x\| = \sqrt{(-5\alpha - 1)^2 + (-3\alpha - 2)^2 + \alpha^2 + \beta^2}$$

$$= \sqrt{35\Big(\alpha + \frac{11}{35}\Big)^2 + \beta^2 + \frac{54}{35}} \geq \sqrt{\frac{54}{35}}.$$

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên đạt được khi $\alpha = -\frac{11}{35}$ và $\beta = 0$. Do đó nghiệm có chuẩn nhỏ nhất là

$$x^* = \Big(\frac{4}{7}, \frac{-37}{35}, \frac{-11}{35}, 0\Big)^T.$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k	err
0	5.0000	3.0000	6.0000	-4.0000	9.5887
1	3.3333	3.0303	0.3030	-3.6364	6.1595
2	3.5301	1.7505	-0.4315	-3.3333	5.2689
3	3.4667	1.1733	-0.6852	-3.0769	4.7661
4	3.3234	0.8742	-0.7603	-2.8571	4.4346
...	...	...	...	...	...
8796	0.5759	-1.0542	-0.3151	-0.0045	7.04×10^{-3}
8797	0.5759	-1.0542	-0.3151	-0.0045	7.04×10^{-3}
...	...	...	...	...	...
78796	0.5719	-1.0568	-0.3144	-0.0005	7.76×10^{-4}
78797	0.5719	-1.0568	-0.3144	-0.0005	7.76×10^{-4}

Bảng 1: Kết quả tính toán với $\alpha_k = \frac{1}{k+10}$, $\delta_k = 0.2$

Bảng 1 được tính toán cho dãy lặp (6)-(7) với điểm xuất phát ban đầu $x^0 = (5, 3, 6, -4)^T$. Ta thấy sau 78797 bước lặp, nghiệm xấp xỉ

$$x^{78797} = (0.5719, -1.0568, -0.3144, -0.0005)^T$$

là một xấp xỉ tốt cho nghiệm có chuẩn nhỏ nhất

$$x^* = \Big(\frac{4}{7}, \frac{-37}{35}, \frac{-11}{35}, 0\Big)^T.$$

2. **Trường hợp** $u^0 = (1,1,1,1) \in \mathbf{R}^4$**.** Lấy $x = (-5\alpha - 1, -3\alpha - 2, \alpha, \beta) \in \Omega$ bất kỳ, ta có

$$\|x - u^0\| = \sqrt{(-5\alpha - 2)^2 + (-3\alpha - 3)^2 + (\alpha - 1^2 + (\beta - 1)^2}$$
$$= \sqrt{35\Big(\alpha + \frac{18}{35}\Big)^2 + (\beta - 1)^2 + \frac{166}{35}} \geq \sqrt{\frac{166}{35}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\alpha = -\frac{18}{35}$ và $\beta = 1$. Do đó nghiệm có u^0-chuẩn nhỏ nhất là

$$x^* = \Big(\frac{11}{7}, \frac{-16}{35}, \frac{-18}{35}, 1\Big)^T.$$

Chọn điểm xuất phát ban đầu $x^0 = (5, 3, 6, -4)^T \in C$, ta có bảng tính toán cho dãy lặp (6)-(7) như sau:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k	err
0	3.0000	5.0000	2.0000	-4.0000	7.9462
1	3.5758	2.7879	0.1515	-3.5455	5.9709
2	3.7407	1.7870	-0.4352	-3.1667	5.2067
3	3.7016	1.3335	-0.6456	-2.8462	4.7492
4	3.5988	1.0969	-0.7153	-2.5714	4.3955
...	...	...	...	...	...
6786	1.5757	-0.4541	-0.5148	0.9926	9.08×10^{-3}
6787	1.5757	-0.4541	-0.5148	0.9926	9.08×10^{-3}
...	...	...	...	...	...
76786	1.5718	-0.4569	-0.5143	0.9993	8.29×10^{-4}
76787	1.5718	-0.4569	-0.5143	0.9993	8.29×10^{-4}

Bảng 2: Kết quả tính toán với $\alpha_k = \frac{1}{k+10}$, $\delta_k = 0.2$

Ta thấy xấp xỉ nghiệm sau sau 76787 bước lặp

$$x^{76787} = (1.5718, -0.4569, -0.5143, -0.9993)^T$$

là một xấp xỉ tốt cho nghiệm có u^0-chuẩn nhỏ nhất

$$x^* = \Big(\frac{11}{7}, \frac{-16}{35}, \frac{-18}{35}, 1\Big)^T.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] Y. Censor and T. Elfving, "A multi projection algorithm using Bregman projections in a product space", *Numer. Algorithms*, **8**(2-4), pp. 221–239, 1994.

[2] C. Byrne, "Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem", *Inverse Problems*, **18**(2), pp. 441–453, 2002.

[3] H.K Xu, "Iterative methods for the split feasibility problem in infinite dimensional Hilbert spaces", *Inverse Problems*, **26**, 105018, 2010.

[4] C. Byrne, "A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction", *Inverse Problems*, **18**, pp. 103–120, 2004.

[5] Y. Censor, T. Elfving, N. Kopf, T. Bortfeld, "The multiple-sets split feasibility problem and its application", *Inverse Problems*, **21**, pp. 2071–2084, 2005.

[6] Y. Censor, T. Bortfeld, B. Martin, A. Trofimov, "A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy", *Phys. Med. Biol.*, **51**, pp. 2353–2365, 2006.

[7] Y. Shehu, D. F. Agbebaku, "On split inclusion problem and fixed point problem for multi-valued mappings", *Comp. Appl. Math.*, **37**, pp. 1807–1824, 2018.

[8] D.X. Son, "An algorithm for solving a class of bilevel split problems involving pseudomonotone equilibrium problem", *Afrika Matematika*, **29**, pp. 1159–1171, 2018.