MỐI QUAN HỆ GIỮA NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ VỚI BỔ ĐỀ FARKAS TRONG KHÔNG GIAN BANACH VÔ HẠN CHIỀU

Nguyễn Văn Mạnh
Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

TÓM TẮT

Trong bài báo trước (Nguyễn Văn Mạnh-2016) đã giới thiệu khái niệm nón pháp tuyến không lồi và ba nguyên lý cực trị trong Giải tích biến phân, tìm hiểu mối quan hệ của các nguyên lý cực trị và Bổ đề Farkas. Bằng việc sử dụng tính chất đặc biệt của không gian Asplund là mọi hệ cực trị luôn thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác cùng với việc đưa ra các Mệnh đề 3.1-3.2 và các Định lý 3.1-3.2, từ đó chúng tôi đưa ra cách chứng minh Bổ đề Farkas trong không gian Asplund vô hạn chiều. Trong không gian Banach tổng quát tính chất mọi hệ cực trị luôn thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác không còn được nghiệm đúng, chúng tôi đã đưa ra Mệnh đề 3.3 qua đó mở rộng Định lý 3.1 trong không gian Banach, từ đó đưa ra cách chứng minh Bổ đề Farkas trong không gian Banach thực vô hạn chiều.

Từ khóa: *Không gian Banach; không gian Asplund; hệ cực trị; nguyên lý cực trị; điểm cực trị địa phương; bổ đề Farkas.*

Ngày nhận bài: 09/5/2020; Ngày hoàn thiện: 29/5/2020; Ngày đăng: 31/5/2020

THE RELATIONSHIP BETWEEN EXTREMAL PRINCIPLE WITH FARKAS LEMMA IN INFINITE DIMENSONS BANACH SPACE

Nguyen Van Manh
Hanoi University of Industry

ABSTRACT

In the previous article (Nguyen Van Manh-2016), we introduced the concept of non-convex normal cone and three extremal principles of variational analysis, researched the relationship of extremal principles and Farkas lemma. By using the fact that in Asplund space, all extremal systems always satisfy exact extremal principle and by introducing of Propositon 3.1-3.2 and Theorem 3.1-3.2, we gave the method to prove Farkas lemma in infinite dimensions Asplund space. In the general Banach space, the fact that all extremal systems always satisfy the exact extremal principle is not hold. Therefore, in this article, we propose Proposition 3.3 thereby extending Theorem 3.1 in Banach space, thereby giving method to prove Farkas's Lemma in infinite dimensions Banach space.

Keywords: *Banach space; Asplund space; extremal systems; extremal principle; local extremal point; Farkas lemma.*

Received: 09/5/2020; Revised: 29/5/2020; Published: 31/5/2020

Email: nvmanhhn@haui.edu.vn

1. Cực trị địa phương của hệ tập, không gian Asplund

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm của giải tích biến phân (Xem [1], [2]).

Định nghĩa 1. Xét $F : X \to X^*$ là ánh xạ đa trị giữa không gian Banach X và không gian đối ngẫu X^* của nó khi đó ta có :

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x_k \longrightarrow \bar{x}} F(x) = \Big\{ x^* \in X^* \Big| \exists\, x_k \longrightarrow \bar{x}, \; x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*, x_k^* \in F(x_k), \forall k \in \mathbb{N} \Big\}$$

được dùng để chỉ giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski

trong tôpô chuẩn của X và tôpô yếu* (được kí hiệu bằng chữ w^*) của X^*.

Định nghĩa 2. (Pháp tuyến suy rộng)**.** Xét Ω là tập con khác rỗng của X .

i) $x \in \Omega$ cho trước, khi đó tập pháp tuyến ε của Ω tại điểm x được định nghĩa:

$$N_\varepsilon(x;\Omega) = \left\{ x^* \in X \left| \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\| u - x \|} \le e \right. \right\}$$

Khi $\varepsilon = 0$ các phần tử của $N_\varepsilon(x;\Omega)$ được gọi là pháp tuyến Fréchet, tập hợp các pháp tuyến Fréchet gọi là nón sơ chuẩn của Ω tại x, kí hiệu $N(x;\Omega)$. Nếu $x \notin \Omega$ ta quy ước $N_\varepsilon(x;\Omega) = \varnothing.$

ii) Cho $\bar{x} \in \Omega$. Khi đó $x^* \in X^*$ là pháp tuyến cơ bản hay pháp tuyến qua giới hạn của Ω tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\varepsilon_k \downarrow 0, x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ và $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ sao cho $x_k^* \in N_{\varepsilon_k}(x_k;\Omega)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Tập hợp các pháp tuyến trên được kí hiệu :

$$N(\bar{x};\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} \bar{x}} F(x) = N_{\varepsilon_k}(x_k;\Omega)$$

và được gọi là nón pháp tuyến cơ bản hay nón pháp tuyến qua giới hạn) (basic/limiting) của Ω tại $\bar{x}$. Tương tự như trên nếu $\bar{x} \notin \Omega$ thì $N(\bar{x};\Omega) = \varnothing.$

Định nghĩa 3. Cho $\Omega_1,...,\Omega_m$ là những tập con khác rỗng trong không gian Banach X với $m \ge 2$, $\bar{x}$ là điểm chung của các tập hợp trên. Ta nói $\bar{x}$ là điểm cực trị địa phương của hệ $\{\Omega_1,...,\Omega_m\}$ nếu tồn tại các dãy $\{a_{ik}\} \subset X\,(i = 1,...,m)$ sao cho $a_{ik} \to 0$ khi $k \to \infty$ và lân cận U của $\bar{x}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\bigcap_{i=1}^{m} (\Omega_i - a_{ik}) \bigcap U = \varnothing \text{ với mọi } k \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn.}$$

Khi đó $\{\Omega_1,...,\Omega_m,\bar{x}\}$ được gọi là hệ cực trị trong không gian X .

Có thể hiểu rằng một hệ tập là hệ cực trị tại một điểm chung của chúng nếu ta có thể tách rời địa phương các tập đó bằng cách làm nhiễu nhỏ theo kiểu tịnh tiến các tập đã cho, với các phương tịnh tiến là những véctơ có chuẩn bé hơn một số dương tùy ý cho trước.

Định nghĩa 4. (Không gian Asplund)

Không gian Banach X được gọi là *Asplund* hay có *tính chất Asplund,* nếu mọi hàm lồi liên tục $\phi : U \to \mathbb{R}$ với $U \subset X$ là tập lồi mở là khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của *U*.

2. Các nguyên lý cực trị

Định nghĩa 5. Cho $\{\Omega_1,...,\Omega_m,\bar{x}\}$ là hệ cực trị trong không gian Banach X . Ta nói:

(i) Hệ cực trị $\{\Omega_1,...,\Omega_m,\bar{x}\}$ được gọi là thỏa mãn *nguyên lý ε-cực trị* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $x_i \in \Omega_i \bigcap (\bar{x} + \varepsilon B)$ và $x_i^* \in X^*$, sao cho

$$x_i^* \in N_\varepsilon(x_i;\Omega_i), i = 1,...,m, \quad (2a)$$

$$x_1^* + ... + x_m^* = 0, \quad (2b)$$

$$\|x_1^*\| + ... + \|x_m^*\| = 1. \quad (2c)$$

(ii) Hệ cực trị $\{\Omega_1,...,\Omega_m,\bar{x}\}$ được gọi là thỏa mãn *nguyên lý cực trị xấp xỉ* nếu với mọi

$\varepsilon > 0$ tồn tại $x_i \in \Omega_i \cap (\bar{x} + \varepsilon B)$ và $x_i^* \in N_\varepsilon(x_i;\Omega_i) + \varepsilon B^*, i = 1,...,m,$ sao cho các điều kiện (2b), (2c) được thỏa mãn.

(iii) Hệ cực trị $\{\Omega_1,...,\Omega_m,\bar{x}\}$ được gọi là thỏa mãn *nguyên lý cực trị chính xác* nếu tồn tại các véctơ pháp tuyến qua giới hạn $x_i^* \in N(x_i;\Omega_i), i = 1,...,m,$ thỏa mãn các điều kiện (2b), (2c).

3. Mối quan hệ giữa nguyên lý cực trị với bổ đề Farkas

3.1. Ba mệnh đề bổ trợ

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại hai Mệnh đề 3.1-3.2 đã được chúng tôi đưa ra và chứng minh trong [3], và đưa ra mệnh đề mới Mệnh đề 3.3 nhằm giải quyết tính thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác cho một hệ cực trị trong không gian Banach thực.

Mệnh đề 3.1. *Cho X là không gian Banach thực và $a_i \in X^* \setminus \{0\}, i = 0,...,m.$*

Đặt $$\Omega_0 = \{x \in X \mid \langle a_0, x\rangle > 0\} \cup \{0\},$$ $$\Omega_i = \{x \in X \mid \langle a_i, x\rangle \le 0\}, i = 1,...,m.$$

Ta có

$$N(0;\Omega_0) = \{-\lambda a_0 \mid \lambda \ge 0\}, \quad (3.1)$$

$$N(0;\Omega_i) = \{\mu a_i \mid \mu \ge 0\} \ (i = 1,...,m). \quad (3.2)$$

Mệnh đề 3.2. Cho hệ tập

$$\Omega_0 = \{x \in X \mid \langle a_0, x\rangle > 0\} \cup \{0\}, \quad (3.3)$$

$$\Omega_i = \{x \in X \mid \langle a_i, x\rangle \le 0\}, i = 1,...,m. \quad (3.4)$$

với X là không gian Banach và $a_0,...,a_m \in X^*$. Giả sử rằng $a_0 \ne 0$ và bất đẳng thức $\langle a_0, x\rangle \le 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \le 0$ $i = 1,...,m.$ Khi đó ta có $\{\Omega_1,...,\Omega_m,0\}$ là một hệ cực trị.

Mệnh đề 3.3. *Cho*

$$\Omega_0 = \{x \in X \mid \langle a_0, x\rangle > 0\} \cup \{0\}, \quad (3.5)$$

$$\Omega_i = \{x \in X \mid \langle a_i, x\rangle \le 0\}, i = 1,...,m. \quad (3.6)$$

X là không gian Banach thực và $a_0,...,a_m \in X^*$. Giả sử $a_0 \ne 0$ và $\langle a_0, x\rangle \le 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \le 0$ $i = 1,...,m.$

Ta có:

(I) *Hệ cực trị $\{\Omega_1,...,\Omega_m,0\}$ thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác.*

(II) *$\{\Omega_0,\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_{m-1},\Omega_m,0\}$ là hệ cực trị và thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác.*

Chứng minh. Đặt

$$A_0 = \{(x,x,...,x) \in X^m \mid x \in \Omega_0\},$$

$$A_1 = \Omega_1 \times ... \times \Omega_m, \bar{z} = (0,0,...,0) \in X^m$$

Ta chứng minh

1) $\{A_0, A_1, \bar{z}\}$ là hệ cực trị.

2) $\{A_0, A_1, \bar{z}\}$ thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác

1) Xét dãy $u_k = -\varepsilon_k(u_0,...,u_0) \in X^m$ với $\varepsilon_k \downarrow 0$ khi $k \to \infty, u_0 \in X$ và $\langle a_0, u_0\rangle > 0$.

Ta có:

$(A_0 - z_k) \cap A_1 = \varnothing$ với k đủ lớn

Thật vậy, giả sử tồn tại

$$z_k \in (A_0 - u_k) \cap A_1 \quad (3.7)$$

Từ $z_k \in A_0 - u_k$ do đó tồn tại

$z_{0k} = (x_{0k},...,x_{0k}) \in A_0, (x_{0k} \in \Omega_0)$ sao cho $z_k = z_{0k} + \varepsilon_k(u_0,...,u_0)$

Ta thu được

$$z_k = z_{0k} + \varepsilon_k(u_0,...,u_0) \quad (3.8)$$

$$= (x_{0k} + \varepsilon_k u_0,...,x_{0k} + \varepsilon_k u_0) \quad (3.9)$$

Kết hợp (3.11) với $z_k \in A_1$ ta có

$$x_{0k} \in \Omega_0, x_{0k} + \varepsilon_k u_0 \in \Omega_i,\ i = 1,...,m. \quad (3.10)$$

Làm hoàn toàn tương tự Mệnh đề 3.2 ta có điều phải chứng minh.

2) Ta có

$$A_0 \cap A_1 = \{\bar{z}\}$$

Thật vậy, giả sử rằng

$$\exists z \in A_0 \cap A_1 \qquad (3.11)$$

Từ $z \in A_0$ suy ra

$$z = (x, ..., x) \in X^m, x \in \Omega_0 .$$

Mặt khác $z \in A_1$ do đó

$$x \in \Omega_i, (i = 1, ..., m)$$

theo giả thiết $\langle a_0, x \rangle \le 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức

$$\langle a_i, x \rangle \le 0 \; i = 1, ..., m,$$

suy ra $x = 0$ do đó $z = \bar{z}$. Từ

$$\Omega_i, (i = 1, ..., m)$$

là các tập lồi có $\operatorname{int}\Omega_i \ne \varnothing$ và theo tính chất của không gian tích X^m, ta thu được A_0, A_1 là các tập lồi, $\bar{z} \in bdA_1, \operatorname{int} A_1 \ne \varnothing.$

Kết hợp các kết quả thu được ở trên cùng với $A_0 \cap A_1 = \{\bar{z}\}$,

suy ra A_0, A_1 tách yếu được. Do đó, tồn tại

$$z_0^* \in N(\bar{z}; A_0), z_1^* \in N(\bar{z}; A_1), \qquad (3.12a)$$

$$z_0^* + z_1^* = 0, \qquad (3.12b)$$

$$\|z_0^*\| + \|z_1^*\| = 1. \qquad (3.12c)$$

Mặt khác ta lại có:

$$N(\bar{z}; A_0) = \{z^* = (x_1^*, ..., x_m^*) \in (X^*)^m \mid x_1^* + ... + x_m^* \in N(0; \Omega_0)\} \qquad (3.13)$$

Thật vậy, theo Định nghĩa 1.1 [1] (p.4) về nón pháp tuyến qua giới hạn. Ta có:

$$N(\bar{z}; A_0) = \{z^* = (x_1^*, ..., x_m^*) \in (X^*)^m \mid \langle z^*, z \rangle \le 0, \forall z \in A_0\} \qquad (3.14)$$

$$= \{z^* = (x_1^*, ..., x_m^*) \in (X^*)^m \mid \langle x_1^{0*}, x \rangle + ... + \langle x_m^{0*}, x \rangle \le 0, \forall x \in \Omega_0\} \qquad (3.15)$$

$$= \{z^* = (x_1^*, ..., x_m^*) \in (X^*)^m \mid \langle x_1^{0*} + ... + x_m^{0*}, x \rangle \le 0, \forall x \in \Omega_0\} \qquad (3.16)$$

Do đó (3.13) được nghiệm đúng. Theo Mệnh đề 1.2 [1] (p.6). Ta có:

$$N(\bar{z}; A_1) = \{z^* = (x_1^{1*}, ..., x_m^{1*}) \in (X^*)^m \mid x_i^{1*} \in N(0; \Omega_i) \; i = 1, ..., m\}$$

Từ (3.14b) suy ra

$$(x_1^{0*}, ..., x_m^{0*}) + (x_1^{1*}, ..., x_m^{1*}) = 0,$$

$$\Leftrightarrow ((x_1^{0*} + x_1^{1*}), ..., (x_m^{0*} + x_m^{1*})) = 0$$

do đó $x_i^{0*} + x_i^{1*} = 0, (i = 1, .., m) \qquad (3.17)$

theo (3.17) suy ra

$$(x_1^{0*} + ... + x_m^{0*}) + (x_1^{1*} + ... + x_m^{1*}) = 0 \qquad (3.18)$$

Áp dụng định nghĩa về chuẩn trong không gian tích, ta thu được

$$\|z_1^* = (x_1^{1*}, ..., x_m^{1*})\| = \|x_1^{1*}\| + ... + \|x_m^{1*}\|$$

Từ (3.12b) và (3.12c) thu được $\|z_1^*\| \ne 0,$ ta suy ra rằng $\exists i \in \{1, ..., m\}$ sao cho $x_i^{1*} \ne 0.$ Kết hợp điều vừa thu được với (3.18) suy ra hệ cực trị $\{\Omega_0, ..., \Omega_m, 0\}$ thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác.

(II). Làm hoàn toàn tương tự Mệnh đề 3.2, ta có $\{\Omega_0, \Omega_1 \cap ... \cap \Omega_{m-1}, \Omega_m, 0\}$ là hệ cực trị.

$$B = \Omega_1 \cap ... \cap \Omega_{m-1}, \qquad (3.19)$$

Đặt

$$B_0 = \Omega_0 \times \Omega_m, \qquad (3.20)$$

$$B_1 = \{(x, x) \in X^2 \mid x \in B\} \qquad (3.21)$$

Xét dãy $u_k = -\varepsilon_k (u_0, ..., u_0) \in X^m$ với $\varepsilon_k \downarrow 0$ khi $k \to \infty, u_0 \in X$ và $\langle a_0, u_0 \rangle > 0$.

Ta thu được

$$\left(B_0 - u_k\right) \cap B_1 = \varnothing, \qquad (3.22)$$

với k đủ lớn. Thật vậy, giả sử

$$\left(B_0 - u_k\right) \cap B_1 \neq \varnothing$$

khi đó tồn tại

$$z_k \in \left(B_0 - u_k\right) \cap B_1.$$

Từ $z_k \in B_1$ do đó $z_k = \left(x_k, x_k\right), \left(x_k \in B\right)$.

Mặt khác $z_k \in \left(B_0 - u_k\right)$ suy ra

$\exists x_{0k} \in \Omega_0, x_{mk} \in \Omega_m$ sao cho

$$z_k = \left(x_{0k} + \varepsilon_k u_0, x_{mk}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x_k, x_k\right) = \left(x_{0k} + \varepsilon_k u_0, x_{mk}\right)$$

Từ các kết quả trên ta thu được

$x_k \in \Omega_1 \cap ... \cap \Omega_m, x_k = x_{0k} + \varepsilon_k u_0$, với $x_{0k} \in \Omega_0$, tương tự Mệnh đề (3.2) ta có $\left\{B_0, B_1, (0,0)\right\}$ là hệ cực trị.

Mặt khác theo (3.5), (3.6) ta $\Omega_i, \left(i = 0,..,m\right)$ là các tập lồi với $\operatorname{int}\Omega_i \neq \varnothing, \left(i = 1,..,m\right)$ và $0 \in bd\Omega_i$. Dễ dàng ta chứng minh được B_0, B_1 cũng là các tập lồi, có $\operatorname{int} B_0 \neq \varnothing$, và $\left(0,0\right) \in bdB_0$. Làm tương tự (**I**), ta có hệ cực trị $\left\{B_0, B_1, (0,0)\right\}$ thỏa mãn nguyên lý cực trị chính xác.

3.2 *Dạng mở rộng của Bổ đề Farkas trong không gian Banach*

Định lý 3.1. (Nón pháp tuyến của tập nghiệm của hệ bất đẳng thức tuyến tính thuần nhất) *Cho X là không gian Banach thực và*

$$\Omega_i = \left\{x \in X \mid \langle a_i, x\rangle \leq 0\right\}, i = 1,...,m, \quad (3.23)$$

với $a_1,...,a_m \in X^*$. Khi đó ta có

$$N\left(0;\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_m\right) = N\left(0;\Omega_1\right) + ... + N\left(0;\Omega_m\right) \qquad (3.24)$$

Chứng minh. Ta quy nạp theo *m*. Với $m = 1$ hiển nhiên $N\left(0;\Omega_1\right) = N\left(0;\Omega_1\right)$.

Giả sử rằng (3.24)) nghiệm đúng với các hệ gồm $m-1$ $(m \geq 2)$ tập ở dạng (3.25), có nghĩa là

$$N\left(0;\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_{m-1}\right) = N\left(0;\Omega_1\right) + ... + N\left(0;\Omega_{m-1}\right)$$

ở đó

$\Omega_i = \left\{x \in X \mid \langle a_i, x\rangle \leq 0\right\}, i = 1,...,m-1$, và $a_1,...,a_{m-1} \in X^*$ được lấy tùy ý. Ta cần chứng minh rằng (3.24) cũng đúng với các hệ gồm $m \geq 2$ tập ở dạng (3.23). Dễ thấy rằng

$$N\left(0;\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_m\right) \supset N\left(0;\Omega_1\right) + ... + N\left(0;\Omega_m\right).$$

Ta cần chứng minh bao hàm thức ngược lại. Nhận xét thấy, $N\left(0;\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_m\right)$ là tập tất cả các véctơ $u_0 \in X^*$ mà bất đẳng thức $\langle u_0, x\rangle \leq 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \leq 0$ $\left(i = 1,...,m\right)$. Lấy tùy ý $u_0 \in N\left(0;\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_m\right)$. Khi đó, bất đẳng thức $\langle u_0, x\rangle \leq 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \leq 0, i = 1,...,m$. Nếu $u_0 = 0$ thì hiển nhiên u_0 thuộc vào tập hợp vế phải của (3.24). Do đó ta có thể giả sử rằng $u_0 \neq 0$.

Đặt
$$\Omega_0 = \left\{x \in X \mid \langle u_0, x\rangle > 0\right\} \cup \left\{0\right\},$$
$$B = \Omega_1 \cap ... \cap \Omega_{m-1}, A = B \cap \Omega_m$$

Theo Mệnh đề 3.2, ta có $\left\{\Omega_0, B, \Omega_m, 0\right\}$ là hệ cực trị.. Áp dụng Mệnh đề 3.3 (**II**) cho hệ cực trị $\left\{\Omega_0, B, \Omega_m, 0\right\}$, ta suy ra tồn tại $x_0^*, x_B^*, x_m^* \in X^*$ thỏa mãn

$$x_0^* \in N\left(0;\Omega_0\right), x_B^* \in N\left(0;B\right), x_m^* \in N\left(0;\Omega_m\right)$$

$$x_0^* + x_B^* + x_m^* = 0 \qquad (3.25a)$$

$$\left\|x_0^*\right\| + \left\|x_B^*\right\| + \left\|x_m^*\right\| = 1 \qquad (3.25b)$$

Theo Mệnh đề 3.1,

$N\left(0;\Omega_0\right)=\left\{-\lambda_0 u_0 \mid \forall\lambda_0\geq 0\right\}$,

$N\left(0;\Omega_m\right)=\left\{\lambda_m u_m \mid \forall\lambda_m\geq 0\right\}$,

Vì vậy tồn tại $\lambda_0\geq 0$ và $\lambda_m\geq 0$ sao cho

$$x_0^*=-\lambda_0 u_0,\quad x_m^*=\lambda_m a_m$$

Khi đó đẳng thức (3.27a) tương đương với

$$\lambda_0 u_0=x_B^*+\lambda_m a_m. \qquad (3.26)$$

Xét các trường hợp sau:

(i) $\lambda_0\neq 0$. Từ (3.28) ta có

$$u_0=\frac{1}{\lambda_0}x_B^*+\frac{\lambda_m}{\lambda_0}a_m. \qquad (3.27)$$

Do $x_B^*\in N\left(0;B\right)$ theo giả thiết quy nạp ta có $N\left(0;B\right)=N\left(0;\Omega_1\right)+...+N\left(0;\Omega_{m-1}\right)$. Vì vậy, tồn tại $\lambda_1^B\geq 0,...,\lambda_{m-1}^B\geq 0$ sao cho

$$x_B^*=\lambda_1^B a_1+...+\lambda_{m-1}^B a_{m-1}.$$

Thay biểu thức của x_B^* vào (3.29), ta thu được

$$u_0=\frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_1^B a_1+...+\lambda_{m-1}^B a_{m-1}\right)+\frac{\lambda_m}{\lambda_0}a_m,$$
$$=\frac{\lambda_1^B}{\lambda_0}a_1+...+\frac{\lambda_{m-1}^B}{\lambda_0}a_{m-1}+\frac{\lambda_m}{\lambda_0}a_m.$$

Do đó u_0 thuộc vào tập hợp ở vế phải của (3.24).

(ii) $\lambda_0=0$. Khi đó ta có $x_m^*=-x_B^*$ hay $\lambda_m a_m=-x_B^*$. Suy ra $a_m=-\frac{1}{\lambda_m}x_B^*$.

a) Nếu $\Omega_0\cap B=\left\{0\right\}$ thì

$$\left\langle u_0,x\right\rangle\leq 0\ \forall x\in B.$$

Do đó tồn tại các số $\tilde{\lambda}_i\geq 0,\ i=1,...,m-1$, sao cho

$$u_0=\tilde{\lambda}_1 a_1+...+\tilde{\lambda}_{m-1}a_{m-1}$$
$$=\tilde{\lambda}_1 a_1+...+\tilde{\lambda}_{m-1}a_{m-1}+0a_m.$$

Suy ra $u_0\in N\left(0;\Omega_1\right)+...+N\left(0;\Omega_m\right)$.

b) Tồn tại $\tilde{x}\in\left(\Omega_0\cap B\right)\setminus\left\{0\right\}$. Khi đó ta có $\tilde{x}\notin\Omega_m$. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng $\tilde{x}\in\Omega_m$. Vì

$$\tilde{x}\in B\cap\Omega_m=\Omega_1\cap...\cap\Omega_m,\left\langle u_0,\tilde{x}\right\rangle\leq 0.$$

suy ra $\tilde{x}\notin\Omega_0\setminus\left\{0\right\}$, dẫn đến mâu thuẫn. Từ những điều đã nói ở trên ta thu được

$$\begin{cases}\left\langle a_i,\tilde{x}\right\rangle\leq 0\ \left(i=1,...,m-1\right),\\ \left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle>0,\\ \left\langle u_0,\tilde{x}\right\rangle>0.\end{cases} \qquad (3.28)$$

Đặt

$$a_i'=a_i-\frac{\left\langle a_i,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}a_m,\ i=1,...,m-1, \qquad (3.29)$$

$$u_0'=u_0-\frac{\left\langle u_0,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}a_m. \qquad (3.30)$$

Ta xét hai trường hợp sau:

1) Bất đẳng thức $\left\langle u_0',x\right\rangle\leq 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức $\left\langle a_i',x\right\rangle\leq 0, i=1,...,m-1.$

Áp dụng giả thiết quy nạp đối với hệ véctơ $a_1',...,a_{m-1}'$, ta tìm được $\lambda_1'\geq 0,...,\lambda_{m-1}'\geq 0$ sao cho

$$u_0'=\lambda_1'a_1'+...+\lambda_{m-1}'a_{m-1}'$$

Kết hợp đẳng thức cuối với (3.29) và (3.30), ta thu được

$$u_0-\frac{\left\langle u_0,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}a_m=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i'\left[a_i-\frac{\left\langle a_i,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}a_m\right],$$

hay

$$u_0=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i'a_i'+\left[\frac{\left\langle u_0,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}-\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i'\frac{\left\langle a_i,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}\right]a_m.$$

Từ (3.30) ta suy ra

$$\frac{\left\langle u_0,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}>0,\frac{\left\langle a_i,\tilde{x}\right\rangle}{\left\langle a_m,\tilde{x}\right\rangle}\leq 0,i=1,...,m-1.$$

Vì vậy

$$u_0=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i'a_i+\mu a_m,$$

ở đó $\mu = \dfrac{\langle u_0, \tilde{x}\rangle}{\langle a_m, \tilde{x}\rangle} - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i' \dfrac{\langle a_i, \tilde{x}\rangle}{\langle a_m, \tilde{x}\rangle} \geq 0,$

$\lambda_i' \geq 0, i = 1,..,m$

2) Bất đẳng thức $\langle u_0', x\rangle \leq 0$ không là hệ quả của hệ bất đẳng thức $\langle a_i', x\rangle \leq 0, i = 1,...,m-1.$ Khi đó tồn tại $x' \in X$ sao cho

$$\begin{cases} \langle a_i', x'\rangle \leq 0,\ i = 1,...,m-1, \\ \langle u_0', x'\rangle > 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Chọn $x = x' - \dfrac{\langle a_m, x'\rangle}{\langle a_m, \tilde{x}\rangle}\tilde{x}.$

Do (3.29), (3.30) và cách chọn x ta có

$$\langle u_0', \tilde{x}\rangle = 0,\ \langle a_m, x\rangle = 0, \quad (3.32)$$

$$\langle a_i', \tilde{x}\rangle = 0,\ i = 1,...,m-1. \quad (3.33)$$

Hiển nhiên $\langle a_m, x\rangle = 0.$ Từ (3.33) và do cách chọn x ta có

$$\langle a_i', x\rangle = \langle a_i', x'\rangle,\ i = 1,...,m-1. \quad (3.34)$$

Từ (3.31) suy ra

$$\langle a_i', x\rangle = \langle a_i, x\rangle - \frac{\langle a_i, \tilde{x}\rangle}{\langle a_m, \tilde{x}\rangle}\langle a_m, x\rangle = \langle a_i, x\rangle \quad (3.35)$$

Kết hợp (3.31), (3.34) và (3.35) ta thu được $\langle a_i, x\rangle = \langle a_i', x\rangle \leq 0,\ i = 1,...,m-1.$

Mặt khác, từ (3.32) và (3.31) ta có

$$\langle u_0', x\rangle = \langle u_0', x'\rangle - \frac{\langle a_m, x'\rangle}{\langle a_m, \tilde{x}\rangle}\langle u_0', \tilde{x}\rangle, \\ = \langle u_0', x'\rangle > 0.$$

Lại có

$$\langle u_0', x\rangle = \left\langle u_0 - \frac{\langle u_0, \tilde{x}\rangle}{\langle a_m, \tilde{x}\rangle}a_m, x\right\rangle = \langle u_0, x\rangle.$$

Do đó, $\langle u_0, x\rangle = \langle u_0', x\rangle > 0.$ Tóm lại ta có

$$\begin{cases} \langle a_i, x\rangle \leq 0,\ i = 1,...,m-1, \\ \langle a_m, x\rangle = 0, \\ \langle u_0, x\rangle > 0 \end{cases}$$

mâu thuẫn với điều giả định ở đầu chứng minh bất đẳng thức là hệ quả của hệ bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \leq 0, i = 1,...,m-1.$

Trong cách chứng minh của định lý trên chúng tôi đã sử dụng kĩ thuật lập luận của Bartl [4].

Định lý 3.2 (Bổ đề Farkas trong không gian Banach thực) Cho X là không gian Banach, và $a_1,...,a_{m-1} \in X^*.$ Khi đó, bất đẳng thức $\langle a_0, x\rangle \leq 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức

$\langle a_i, x\rangle \leq 0,\ i = 1,...,m,$

Khi và chỉ khi tồn tại $\lambda_1 \geq 0,...,\lambda_m \geq 0$ sao cho

$$a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i.$$

Chứng minh. Đặt $\Omega_i = \{x \in X \mid \langle a_i, x\rangle \leq 0\}\ (i = 1,...,m).$ Dễ thấy rằng bất đẳng thức $\langle a_0, x\rangle \leq 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức (3.38) khi và chỉ $a_0 \in N(0;\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_m).$

Áp dụng Định lý 3.1 cho hệ tập $\Omega_1,...,\Omega_m$, ta có $a_0 \in N(0;\Omega_1) + ... + N(0;\Omega_m).$

Từ đó, do Mệnh đề 3.1, tồn tại $\lambda_1 \geq 0,...,\lambda_m \geq 0$ sao cho $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i.$

Ngược lại nếu có $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, với $\lambda_1 \geq 0,...,\lambda_m \geq 0$ hiển nhiên ta có $a_0 \in N(0;\Omega_1) + ... + N(0;\Omega_m).$ Ta có điều phải chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1]. B. S. Mordukhovich, “Generalized differential calculus for nonsmooth and set-valued mappings,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 183, pp. 250-288, 1994.

[2]. B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, vol. 1: Basic Theory, Springer, New York, 2006.

[3]. V. M. Nguyen, “The relationship between extremal principle with Farkas Lemma in in infinite dimensions Asplund space,” *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 159, no. 14, pp. 119-124, 2016.

[4]. D. Bartl, “A short algebraic proof of the Farkas lemma,” *SIAM Journal of Optimization*, vol. 19, pp. 234-239, 2008.