TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 17, Số 9 (2020): 1547-1555

Vol. 17, No. 9 (2020): 1547-1555

ISSN:
1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

LỌC TỰ NHIÊN CỦA K-LÍ THUYẾT MORAVA CỦA 2-NHÓM ABEL SƠ CẤP

Trần Vũ An, Nguyễn Lê Chí Quyết*

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Nguyễn Lê Chí Quyết – Email: quyetnlc@hcmue.edu.vn*

Ngày nhận bài: 24-6-2020; ngày nhận bài sửa: 04-9-2020, ngày chấp nhận đăng: 09-9-2020

TÓM TẮT

Để hiểu các K-lí thuyết Morava $K(n)^*(-)$ tương ứng với số nguyên tố $p=2$, một trong những điểm khởi đầu quan trọng là tìm hiểu cấu trúc tự nhiên của hàm tử thuận biến $V \mapsto K(n)^*(BV^\#)$, trong đó V là một 2-nhóm abel sơ cấp (nói cách khác, V là một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{F}_2$), $BV^\#$ là không gian phân loại của đối ngẫu tuyến tính của V. Một số tính chất sâu về cấu trúc của hàm tử K-lí thuyết Morava thứ hai $K(2)^*(-)$ đã được nghiên cứu trong bài báo (Nguyen, 2020). Bài báo này nhằm tổng quát một phần kết quả của bài báo (Nguyen, 2020), trình bày về các lọc tự nhiên của hàm tử $V \mapsto K(n)^*(BV^\#)$. Cụ thể, bài báo nghiên cứu các hàm tử con của hàm tử $V \mapsto K(n)^*(BV^\#)$, định nghĩa các lọc n chiều của hàm tử này. Từ đó chứng minh rằng các thương liên tiếp của lọc này chính là tích tenxơ của các hàm tử lũy thừa ngoài.

Từ khóa: K-lí thuyết Morava; biểu diễn tổng quát; n-lọc

1. Giới thiệu

Xét hàm tử thuận biến $V \mapsto K(n)^*(BV^\#)$, trong đó $K(n)^*(-)$ là hàm tử *K*-lí thuyết Morava thứ n tương ứng với số nguyên tố $p=2$ (Wurgler, 1986). Vì $K(n)^*(-)$ tuần hoàn chu kì $(2^{n+1}-2)$ nên ta chỉ cần xét phiên bản $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$-phân bậc $V \mapsto K(n)^{\bar{*}}(BV^\#)$. Hàm tử này là một vật của phạm trù $\mathfrak{F}$ gồm các hàm tử biến một $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ hữu hạn chiều thành một $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ. Mỗi vật F của phạm trù $\mathfrak{F}$ được xem như một biểu diễn tổng quát của nhóm tuyến tính tổng quát trên $\mathbb{F}_2$, nghĩa là $F(V)$ luôn có cấu trúc

Cite this article as: Tran Vu An, & Nguyen Le Chi Quyet (2020). Natural filtration of the Morava K-theories of elementary abelian 2-groups. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 17*(9), 1547-1555.

$\mathbb{F}_2[GL(V)]$-môđun. Thông tin chi tiết về phạm trù $\mathfrak{F}$ có thể được tham khảo trong bài báo (Kuhn, 2000).

Theo Nguyen (2020), ta có một đẳng cấu tự nhiên giữa các hàm tử $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$-phân bậc

$$\frac{S^*(J(V))}{(u+v)=(u)+(v)+(u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}} \to K(n)^{\bar{*}}(BV^{\#}),$$

trong đó, $J(V)$ là ideal bổ sung của đại số nhóm $\mathbb{F}_2[V]$, $|J(V)|=\bar{2}$, $(u):=[u]-[0]$ và $S^*(-)$ là hàm tử đại số đối xứng. Ta kí hiệu hàm tử thuận biến tương ứng ở vế phải là $\mathcal{K}_n$. Cũng theo Nguyen (2020), trong $\mathcal{K}_n(V)$ có các quan hệ cơ bản như sau:

- $(u+v)=(u)+(v)+(u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}$,
- $(u)^{2^n}=0$,
- $(u+v)^{2^i}=(u)^{2^i}+(v)^{2^i}$, $\forall i\geq 1$.

Bài báo này dùng các quan hệ bên trên để nghiên cứu các hàm tử con, hàm tử thương và các lọc tự nhiên của hàm tử $\mathcal{K}_n$ (với $n\geq 2$). Cụ thể, bài báo được trình bày với cấu trúc như sau:

Mục thứ hai nhằm định nghĩa các hàm tử con $K_I=K_{(i_1,\ldots,i_n)}$ của $\mathcal{K}_n$ với $I=(i_1,\ldots,i_n)$, xác định một vài đặc trưng của K_I, từ đó xác định giao của các hàm tử con này.

Mục thứ ba nhằm sử dụng các tính chất của hàm tử K_I để chứng minh định lí sau:

Định lí 1.1.

(Xem Định lí 3.3) Với mọi số tự nhiên k, đặt $\mathcal{D}_k=\sum_{\mathcal{S}(I)\geq k}K_I$, trong đó $\mathcal{S}(I)=i_1+2i_2+\cdots+2^{n-1}i_n$, thì $\{\mathcal{D}_k\}_{k\geq 0}$ là một lọc giảm của hàm tử $\mathcal{K}_n$ có các thương liên tiếp $\mathcal{D}_k/\mathcal{D}_{k+1}$ đẳng cấu với hàm tử $S^k_{2^n}$ ($S^k_{2^n}$ là hàm tử biến mỗi $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ hữu hạn chiều V thành thương của đại số đối xứng $S^*(V)$ bởi quan hệ $v^{2^k}=0$ với mọi $v\in V$).

Mục thứ tư nhằm chứng minh một kết quả về n-lọc của hàm tử $\mathcal{K}_n$ mà các vật thương được xác định bởi tích tenxơ của các hàm tử lũy thừa ngoài. Ta trình bày một số kí hiệu được dùng để phát biểu định lí: kí hiệu $\Lambda^I=\Lambda^{i_1}\otimes\cdots\otimes\Lambda^{i_n}$ ($I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n$), đặt $R_1=(2,-1,0,\ldots,0)$, $R_2=(0,2,-1,0,\ldots,0)$,…, $R_{n-1}=(0,\ldots,0,2,-1)$ và $R_n=(1,0,\ldots,0,-2)$.

Định lí 1.2. (Xem Định lí 4.7)

Với mọi $I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n$, ta có đẳng cấu tự nhiên

$$\frac{K_I}{K_{I-R_1}+\cdots+K_{I-R_n}}\cong\Lambda^I.$$

2. Các hàm tử con $K_{(i_1,\ldots,i_n)}$ của $\mathcal{K}_n$

Với mọi $I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n$, dùng cấu trúc tích của $\mathcal{K}_n$ ta thu được đồng cấu tự nhiên

$$\theta^I : J^{\otimes i_1}\otimes S_{2^{n-1}}^{i_2}\otimes\cdots\otimes S_4^{i_{n-1}}\otimes\Lambda^{i_n}\to\mathcal{K}_n.$$

Định nghĩa 2.1.

Hàm tử K_I là hàm tử con của $\mathcal{K}_n$ xác định bởi ảnh của đồng cấu θ^I; nghĩa là K_I biến mọi $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ hữu hạn chiều thành $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ con của $\mathcal{K}_n(V)$ sinh bởi các phần tử có dạng

$$\left[(u_{1_1})\cdots(u_{1_{i_1}})\right]\left[(u_{2_1})^2\cdots(u_{2_{i_2}})^2\right]\cdots\left[(u_{n_1})^{2^{n-1}}\cdots(u_{n_{i_n}})^{2^{n-1}}\right].$$

Định nghĩa 2.2.

Đặt $R_1=(2,-1,0,\ldots,0)$, $R_2=(0,2,-1,0,\ldots,0),\ldots$, $R_{n-1}=(0,\ldots,0,2,-1)$ và $R_n=(1,0,\ldots,0,-2)$. Ta định nghĩa quan hệ thứ tự bộ phận $\preceq$ trên $\mathbb{N}^n$ như sau: $I\preceq J$ nếu tồn tại các số tự nhiên $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sao cho

$$J=I+\lambda_1R_1+\cdots+\lambda_nR_n.$$

Bổ đề 2.3.

$I\preceq J$ khi và chỉ khi tồn tại các số $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn

$$JM=IM+(2^n-1)L,$$

trong đó

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2^{n-1} & 2^{n-2} & \cdots & 2\\ 2 & 1 & 2^{n-1} & \cdots & 4\\ 4 & 2 & 1 & \cdots & 8\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1\end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix}-\lambda_n & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Chứng minh. Dễ dàng suy ra từ định nghĩa. □

Bổ đề 2.4.

K_I được nhúng trong K_J nếu $I\preceq J$.

Chứng minh. Bổ đề được suy ra trực tiếp từ các quan hệ trong $\mathcal{K}_n(V)$. □

Mệnh đề 2.5. Với mọi $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ V có chiều d. Ta có

$$\dim K_{(i_1,\ldots,i_n)}(V)=\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\preceq(i_1,\ldots,i_n)}\binom{d}{j_1}\cdots\binom{d}{j_n}.$$

Chứng minh. Chọn $e=\{e_1,\ldots,e_d\}$ là một cơ sở của V. Dùng các quan hệ

$$(u+v)^{2^i}=(u)^{2^i}+(v)^{2^i},\forall i\geq 1,$$

Ta thu được hệ sinh sau đây của $K_{(i_1,\dots,i_n)}(V)$:

$$\left\{\left[(u_{1_1})\cdots(u_{1_{i_1}})\right]\left[(e_{2_1})^2\cdots(e_{2_{i_2}})^2\right]\cdots\left[(e_{n_1})^{2^{n-1}}\cdots(e_{n_{i_n}})^{2^{n-1}}\right]: u_{1_l}\in V, e_{k_l}\in e\right\}.$$

Dùng các quan hệ

$$(u+v)=(u)+(v)+(u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}$$

để biểu diễn lại các phần tử của hệ sinh bên trên, ta thu được một cơ sở của $K_{(i_1,\dots,i_n)}(V)$ tạo thành bởi các phần tử có dạng

$$\left[(e_{1_1})\cdots(e_{1_{j_1}})\right]\left[(e_{2_1})^2\cdots(e_{2_{j_2}})^2\right]\cdots\left[(e_{n_1})^{2^{n-1}}\cdots(e_{n_{j_n}})^{2^{n-1}}\right],$$

trong đó, $k_1<\cdots<k_{j_k}$ với mọi $1\le k\le n$ và $(j_1,\dots,j_n)\preceq(i_1,\dots,i_n)$.

Bổ đề được chứng minh. □

Kết quả sau đây cho phép ta tính giao của các hàm tử K_I.

Mệnh đề 2.6.

$K_{I+\alpha R_k}\cap K_{I+\beta R_l}=K_I$ với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ và $1\le k<l\le n$.

Chứng minh. Ta chứng minh kết quả cho trường hợp $\alpha=\beta=1$. Các trường hợp khác được chứng minh tương tự. Hơn nữa, để chứng minh ta chỉ cần dùng lí luận về số chiều. Giả sử số chiều của không gian vectơ V là d. Chọn ε_{I+R_k} và ε_{I+R_l} lần lượt là cơ sở của $K_{I+R_k}(V)$ và $K_{I+R_l}(V)$ (các phần tử của cơ sở được xác định như trong chứng minh của mệnh đề 2.5). Ta nhắc lại một kết quả trong (Hopkins, Kuhn, & Ravenel, 1992) (có thể tham khảo thêm trong (Ravenel, & Wilson, 1980):

$$K(n)^{\bar{*}}(BV^{\#})\cong\mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_d]\big/(x_1^{2^n},\dots,x_d^{2^n}).$$

Từ đẳng cấu này suy ra $\varepsilon_{I+R_k}\cap\varepsilon_{I+R_l}$ là một cơ sở của $K_{I+R_k}\cap K_{I+R_l}$. Đặt $J=(j_1,\dots,j_n)$, theo Bổ đề 2.3,

$$\begin{cases} J\preceq I+R_k\\ J\preceq I+R_l\end{cases}$$

khi và chỉ khi tồn tại

$$\begin{cases} L_k=\begin{pmatrix}-\lambda_n^{(k)} & \lambda_1^{(k)} & \cdots & \lambda_{n-1}^{(k)}\end{pmatrix}, \lambda_i^{(k)}\in\mathbb{N}\\ L_l=\begin{pmatrix}-\lambda_n^{(l)} & \lambda_1^{(l)} & \cdots & \lambda_{n-1}^{(l)}\end{pmatrix}, \lambda_i^{(l)}\in\mathbb{N}\end{cases}$$

thỏa mãn

$$\begin{cases} IM=JM+(2^n-1)(L_k-U_{k+1})\\ IM=JM+(2^n-1)(L_l-U_{l+1})\end{cases},$$

trong đó $U_i=(0,\dots,0,\delta_i,0,\dots,0)$ với δ_i xuất hiện ở vị trí thứ i và $\delta_i=\begin{cases}-1 & \text{khi } i=1\\ 1 & \text{khi } i\ne 1\end{cases}.$

Do đó, $L = L_k - U_{k+1} = L_l - U_{l+1}$ thỏa mãn điều kiện của Bổ đề 2.3. Từ đây suy ra $J \preceq I$. Mệnh đề được chứng minh. □

Hệ quả 2.7.

K_I được nhúng trong K_J khi và chỉ khi $I \preceq J$.

Chứng minh. Nhận xét rằng nếu K_I và K_J so sánh được thì

$i_1 + 2i_2 + \cdots + 2^{n-1}i_n \equiv j_1 + 2j_2 + \cdots + 2^{n-1}j_n \pmod{2^n - 1}$.

Hơn nữa, ta còn có K_I được nhúng trong K_J khi và chỉ khi $K_I \cap K_J = K_I$. Nếu $I \preceq J$ thì K_I được nhúng trong K_J (theo bổ đề 2.4). Nếu $I \npreceq J$ thì giao $K_I \cap K_J$ thực sự nhỏ hơn K_I (theo Mệnh đề 2.6). Hệ quả được chứng minh. □

3. Lọc giảm của hàm tử $\mathcal{K}_n$

Kí hiệu 3.1. Với mọi $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, ta đặt $\mathcal{S}(I) = i_1 + 2i_2 + \cdots + 2^{n-1}i_n$.

Định nghĩa 3.2.

Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa $\mathcal{D}_k := \sum_{\mathcal{S}(I) \geq k} K_I$. Khi đó ta thu được một lọc giảm của hàm tử $\mathcal{K}_n$ như sau:

$\mathcal{K}_n = \mathcal{D}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{D}_k \supset \cdots$.

Lọc $\mathcal{D}_*$ hội tụ vì $\mathcal{K}_n \cong \operatorname{colim}_I K_I$.

Định lí 3.3.

$\mathcal{D}_k / \mathcal{D}_{k+1} \cong S^k_{2^n}$.

Để chứng minh định lí này, ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 3.4. Ta có:

- $\mathcal{S}(I) = \mathcal{S}(I + R_k)$ với mọi $1 \leq k \leq n-1$,
- $\mathcal{S}(I) = \mathcal{S}(I + R_n) + (2^n - 1)$.

Chứng minh. Bổ đề được chứng minh bằng tính toán trực tiếp. □

Bổ đề 3.5. Cho $I \in \mathbb{N}^n$ thỏa mãn $\mathcal{S}(I) = k$. Khi đó, $K_I \subset K_{(k,0,\ldots,0)}$.

Chứng minh. Dùng Bổ đề 2.3, ta tính các số λ_t và chỉ ra rằng chúng đều không âm. Thực vậy, $\lambda_n = 0$, $\lambda_t = \dfrac{1}{2^t}(k - i_1 - 2i_2 - \cdots - 2^{t-1}i_t)$ với mọi $1 \leq t \leq n-1$. □

Mệnh đề 3.6. $\mathcal{D}_k / \mathcal{D}_{k+1} \cong K_{(k,0,\ldots,0)} / K_{(k-1,0,\ldots,0,2)}$.

Chứng minh. Ta có

$$\mathcal{D}_k / \mathcal{D}_{k+1} \cong \frac{\left(\sum_{\mathcal{S}(I)=k} K_I\right) + \left(\sum_{\mathcal{S}(I)\geq k+1} K_I\right)}{\left(\sum_{\mathcal{S}(I)\geq k+1} K_I\right)}$$

$$\cong \frac{\left(\sum_{\mathcal{S}(I)=k} K_I\right)}{\left(\sum_{\mathcal{S}(I)=k} K_I\right) \cap \left(\sum_{\mathcal{S}(I)\geq k+1} K_I\right)}$$

$$\cong \frac{K_{(k,0,\ldots,0)}}{K_{(k,0,\ldots,0)} \cap \left(\sum_{\mathcal{S}(I)\geq k+1} K_I\right) \cap \mathcal{K}_n^{\overline{2k}}} \text{ (theo Mệnh đề 3.5)}$$

$$\cong \frac{K_{(k,0,\ldots,0)}}{\bigcap_{t\geq 0} K_{(k+(2^n-1)t,0,\ldots,0)}}.$$

Theo Mệnh đề 2.6 và Bổ đề 3.4, ta có $\bigcap_{t\geq 0} K_{(k+(2^n-1)t,0,\ldots,0)} \cong K_{(k-1,0,\ldots,0,2)}$. Mệnh đề được chứng minh. □

Chứng minh của Định lí 3.3. Xét toàn cấu $\theta^{(k,0,\ldots,0)} : J^{\otimes k} \to K_{(k,0,\ldots,0)}$. Nhắc lại rằng hàm tử J có một lọc giảm

$$J = J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset J_{n+1} \supset \cdots$$

thỏa mãn $J_k / J_{k+1} \cong \Lambda^k$ (tham khảo trong (Kuhn, 2000), §6). Ở đây, với mọi $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ hữu hạn chiều V, $J_2(V)$ là $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ con của $J(V)$ sinh bởi các phần tử có dạng $(u+v)+(u)+(v)$.

Xét tiếp đồng cấu hợp thành với $\theta^{(k,0,\ldots,0)}$ bởi phép chiếu chính tắc từ $K_{(k,0,\ldots,0)}$ lên $K_{(k,0,\ldots,0)} / K_{(k-1,0,\ldots,0,2)}$. Ảnh của $(J(V))^{\otimes(n-1)} \otimes J_2(V)$ thông qua đồng cấu này bằng không vì $K_{(k-1,0,\ldots,0,2)}(V)$ được sinh bởi các phần tử có dạng $(u_1)\cdots(u_{k-1})((u_k)+(u_k')+(u_k+u_k'))$.

Hơn nữa, do $J/J_2 \cong \mathrm{Id}$ nên đồng cấu này được phân tích thành hợp của hai đồng cấu thông qua $J^{\otimes(k-1)} \otimes \mathrm{Id}$. Bằng quy nạp, ta thu được đồng cấu tự nhiên:

$$T^k \to K_{(k,0,\ldots,0)} / K_{(k-1,0,\ldots,0,2)},$$

trong đó, T^k là hàm tử tích tenxơ. Đây cũng là một toàn cấu. Hơn nữa, nó được phân tích thành hợp của hai đồng cấu thông qua $S_{2^n}^k$ vì cấu trúc tích trên $\mathcal{K}_n$ giao hoán và ta có quan hệ $(u)^{2^n} = 0$ trong $\mathcal{K}_n(V)$.

Do đó, để chứng minh định lí, ta chỉ cần dùng lí luận về số chiều. Thực vậy, giả sử số chiều của không gian vectơ V là d, theo mệnh đề 2.5, ta có:

$$\dim\left[K_{(k,0,\ldots,0)}(V) / K_{(k-1,0,\ldots,0,2)}(V)\right] = \sum_{\mathcal{S}(i_1,\ldots,i_n)=k} \binom{d}{i_1} \cdots \binom{d}{i_n}.$$

Đây cũng là số chiều của $S_{2^n}^k(V)$. □

4. n-lọc của hàm tử $\mathcal{K}_n$

Định nghĩa 4.1. Xét graph định hướng liên kết với hàm tử $\mathcal{K}_n$ được cho bởi:

- Các đỉnh là các hàm tử K_I,
- Chỉ có duy nhất một mũi tên từ K_I đến $K_{I'}$ nếu tồn tại $1 \le k \le n$ thỏa mãn $I' = I + R_k$.

Chú ý 4.2. Cho hai bộ số I, I' bất kì thuộc $\mathbb{N}^n$. Nhận xét rằng K_I được nhúng trong $K_{I'}$ nếu tồn tại một con đường từ K_I đến $K_{I'}$. Hơn nữa, ta suy trực tiếp từ Mệnh đề 2.6 rằng $K_I \cap K_{I'} = K_{I''}$ nếu $K_{I''}$ thỏa mãn *"bài toán tựa phổ dụng"*:

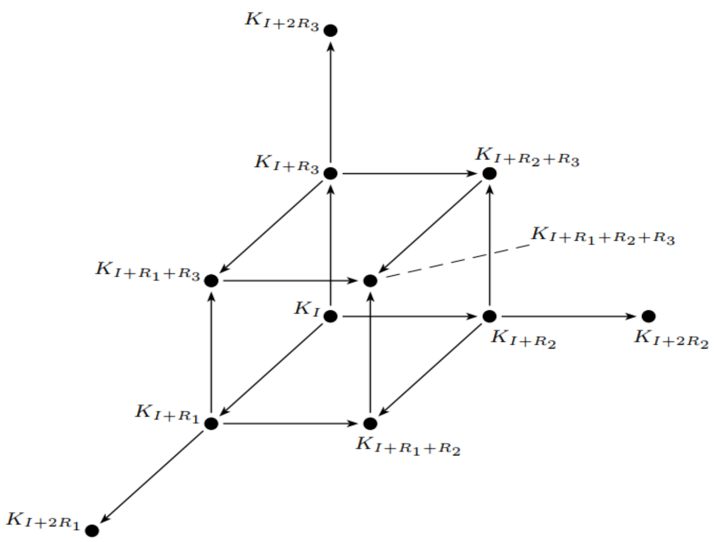
- Tồn tại các con đường từ $K_{I''}$ đến K_I và $K_{I'}$,
- Nếu tồn tại K_J và các con đường từ nó đến K_I, $K_{I'}$ thì tồn tại ít nhất một con đường từ K_J đến $K_{I''}$.

Chú ý 4.3. Hàm tử $\mathcal{K}_n$ là $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$-phân bậc và có phân tích bởi trọng là

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n^{\bar{0}} \oplus \mathcal{K}_n^{\bar{2}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_n^{\overline{2^{n+1}-4}}.$$

Graph định hướng liên kết với hàm tử $\mathcal{K}_n$ do đó cũng phân bậc. Nó được phân tích thành các graph con bất khả phân liên kết với các hạng tử $\mathcal{K}_n^{\bar{0}}, \mathcal{K}_n^{\bar{2}}, \ldots, \mathcal{K}_n^{\overline{2^{n+1}-4}}$.

Ví dụ 4.4. Hình vẽ dưới là một minh họa của graph định hướng liên kết với hàm tử $\mathcal{K}_3$, tương ứng với hạng tử $\mathcal{K}_3^{\overline{2\mathcal{S}(I)}}$ trong phân tích bởi trọng của $\mathcal{K}_3$:



Định nghĩa 4.5.

Cho $\mathfrak{C}$ là một phạm trù abel và C là một vật bất kì của $\mathfrak{C}$. Một n-lọc của C là một họ $\left\{\mathcal{F}_{(i_1,\ldots,i_n)}\right\}_{i_k \in \mathbb{N}, \forall k}$ các vật con của C thỏa mãn $\mathcal{F}_{(i_1,\ldots,i_n)} \subset \mathcal{F}_{(i'_1,\ldots,i'_n)}$ nếu $i_1 \le i'_1, \ldots, i_n \le i'_n$. Phân bậc liên kết với n-lọc này được định nghĩa bởi

$$\operatorname{gr} C := \bigoplus_{i_1,\dots,i_n} \operatorname{gr}_{(i_1,\dots,i_n)} C \text{, trong đó } \operatorname{gr}_{(i_1,\dots,i_n)} C := \frac{\mathcal{F}_{(i_1,\dots,i_n)}}{\mathcal{F}_{(i_1-1,\dots,i_n)} + \cdots + \mathcal{F}_{(i_1,\dots,i_n-1)}}.$$

Chú ý 4.6. Graph định hướng liên kết với hàm tử $\mathcal{K}_n$ xác định một n-lọc của $\mathcal{K}_n$. Nhưng để đơn giản, ta chỉ xét các hạng tử trong phân tích bởi trọng. Với mọi $\overline{2i} \in \mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$, graph bất khả phân liên kết với $\mathcal{K}_n^{\overline{2i}}$ xác định một n-lọc của $\mathcal{K}_n^{\overline{2i}}$. Phân bậc liên kết với n-lọc này được xác định bởi các thương có dạng

$$\frac{K_I}{K_{I-R_1} + \cdots + K_{I-R_n}}.$$

Định lí 4.7. Cho $I = (i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n$. Kí hiệu tích tenxơ $\Lambda^{i_1} \otimes \cdots \otimes \Lambda^{i_n}$ bởi Λ^I. Khi đó ta có một đẳng cấu tự nhiên

$$\frac{K_I}{K_{I-R_1} + \cdots + K_{I-R_n}} \cong \Lambda^I.$$

Chứng minh. Xét toàn cấu

$$\theta^I : J^{\otimes i_1} \otimes S_{2^{n-1}}^{i_2} \otimes \cdots \otimes S_4^{i_{n-1}} \otimes \Lambda^{i_n} \to K_I.$$

Lặp lại các bước như trong chứng minh của Định lí 3.3 ta thu được một toàn cấu

$$S^{i_1} \otimes S_{2^{n-1}}^{i_2} \otimes \cdots \otimes S_4^{i_{n-1}} \otimes \Lambda^{i_n} \to \frac{K_I}{K_{I-R_1} + \cdots + K_{I-R_n}}.$$

Đồng cấu này có thể được phân tích thành hợp của hai đồng cấu thông qua Λ^I bởi vì $\Lambda^* \cong S^*/(x^2=0) \cong S_{2^k}^*/(x^2=0)$ (với mọi $k \in \mathbb{N}^*$).

Định lí được chứng minh bởi các tính toán trực tiếp về số chiều của $\mathbb{F}_2$-không gian vectơ $K_I(V)/(K_{I-R_1}(V) + \cdots + K_{I-R_n}(V))$. Thực vậy, ta có

$$\begin{aligned}\dim \frac{K_I(V)}{K_{I-R_1}(V) + \cdots + K_{I-R_n}(V)} &= \dim K_I(V) - \dim\left(K_{I-R_1}(V) + \cdots + K_{I-R_n}(V)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{1\le l_1<\cdots<l_k\le n} (-1)^k \dim K_{I-R_{l_1}-\cdots-R_{l_k}}(V)\right).\end{aligned}$$

Từ Hệ quả 2.7 suy ra graph định hướng liên kết với thứ tự bộ phận $\preceq$ của $\mathbb{N}^n$ tương thích với graph định hướng liên kết với hàm tử $\mathcal{K}_n$. Hơn nữa, nhờ Mệnh đề 2.5 ta thu được

$$\dim \frac{K_I(V)}{K_{I-R_1}(V) + \cdots + K_{I-R_n}(V)} = \binom{d}{i_1}\cdots\binom{d}{i_n} \quad (d \text{ là số chiều của } V).$$

Đây cũng chính là số chiều của $\Lambda^I(V)$. Định lí được chứng minh. □

- ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*
- ***Lời cảm ơn:*** *Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh trong đề tài trọng điểm mã số CS.2018.19.03TĐ.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Hopkins, M. J., Kuhn N. J. & Ravenel D. C. (1992). Morava *K*-theories of classifying spaces and generalized characters for finite groups. *Algebraic topology (San Feliu de Guixols, 1990)*, Lecture note in Math., *509*, Springer: Berlin, 186-209.

Kuhn, N. J. (2000). The generic representation theory of finite fields: a survey of basic structure. *Infinite length modules (Bielefeld)*. Trends Math., Birkhauser, 193-212.

Nguyen, L. C. Q. (2020). Une description fonctorielle des *K*-théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires. *Bulletin de la SMF*, F. 1, T. 148, 133-172.

Ravenel, D. C., & Wilson W. S. (1980). The Morava *K*-theories of Eilenberg-Mac Lane spaces and the Conner-Floyd conjecture. *Amer. J. Math.*, *102*(4), 691-748.

Wurgler U. (1986). Commutative ring-spectra of characteristic 2. *Comment. Math. Helv.*, *61*(1), 33-45.

NATURAL FILTRATION OF THE MORAVA K-THEORIES OF ELEMENTARY ABELIAN 2-GROUPS

***Tran Vu An, Nguyen Le Chi Quyet*[*]**

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

[*]Corresponding author: Nguyen Le Chi Quyet – Email: quyetnlc@hcmue.edu.vn

Received: June 24, 2020; Revised: September 04, 2020; Accepted: September 09, 2020

ABSTRACT

To understand the Morava K-theory $K(n)^*(-)$ at the prime $p=2$, one of the starting points is to study the structure of the covariant functor $V \mapsto K(n)^*(BV^\#)$, where V is an elementary abelian 2-groups (i.e. the finite dimensional vector space over $\mathbb{F}_2$), $BV^\#$ is the classifying space of the dual of V. The functorial structure of the second Morava K-theory $K(2)^*(-)$ has been studied in the paper (Nguyen, 2020). This paper aims to generalize some results of the paper (Nguyen, 2020): study the natural filtration of the functor $V \mapsto K(n)^*(BV^\#)$. In detail, the paper defines the subfunctors of the functor $V \mapsto K(n)^*(BV^\#)$, then its n-filtration. It also demonstrates that the successive quotients of this n-filtration are the tensor product of some exterior power functors.

Keywords: Morava K-theory; generic representation; n-filtration