

# PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO VỎ TRỤ TRÒN BẰNG VẬT LIỆU RỖNG THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT

Dương Thành Huân<sup>1\*</sup>, Trần Hữu Quốc<sup>2</sup>, Hồ Thị Hiền<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Khoa Cơ - Điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam*

<sup>2</sup>*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng*

\*Tác giả liên hệ: [dthuan@vnua.edu.vn](mailto:dthuan@vnua.edu.vn)

Ngày nhận bài: 14.04.2020

Ngày chấp nhận đăng: 20.07.2020

## TÓM TẮT

Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) của Reissner-Mindlin để xây dựng lời giải tích phân dao động tự do của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu rỗng, tựa khớp trên hai cạnh biên. Mô đun đàn hồi và khối lượng riêng của vật liệu được giả thiết là hàm số của lỗ rỗng, biến đổi trơn và đối xứng theo phương chiều dày vỏ. Hệ phương trình chuyển động của vỏ trụ tròn được thiết lập theo nguyên lý Hamilton. Độ tin cậy của lời giải được kiểm chứng qua so sánh kết quả số với kết quả đã công bố cho trường hợp vỏ trụ tròn bằng vật liệu đẳng hướng. Mặt khác, ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng và các tham số kích thước hình học đến tần số dao động tự do của vỏ trụ tròn được khảo sát và phân tích trong nghiên cứu này.

Từ khóa: Dao động riêng, vật liệu rỗng, vỏ trụ tròn, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất.

## Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Circular Cylindrical Shell Based on the first Shear Deformation Theory

### ABSTRACT

In this paper, an analytical solution based on the first-order shear deformation theory (FSDT) is used for the free vibration analysis of the circular cylindrical shell made of porous materials. The cylindrical shell is simply supported at two ends. The elasticity moduli and mass density of porous materials are assumed to be graded in the thickness direction according to symmetric distribution types. Based on Hamilton's principle, the equations of motion are derived. To verify the reliability of the present solution, the comparisons between the obtained results and the available published literature are performed for the isotropic cylindrical shell, and very good agreement is observed. The effect of porosity coefficient and geometrical parameters on natural frequencies of the shell are also investigated and discussed in details.

Keywords: Free vibration analysis, porous material, cylindrical shell, first-order shear deformation theory.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu rỗng (porous materials) là loại vật liệu có cấu trúc gồm một thành phần ở dạng rắn và thành phần kia ở dạng lỗ rỗng. Trong đó, các lỗ rỗng được chủ động phân bố theo một quy luật nào đó nhằm đạt được những tính chất cơ học mong muốn của người thiết kế. Do có trọng lượng nhẹ, các kết cấu bằng vật liệu rỗng được sử dụng trong nhiều lĩnh vực công nghiệp: hàng không, chế tạo ô tô, tàu biển, xây dựng dân

dụng,... Mặt khác, nhờ tính chất hấp thụ năng lượng của vật liệu rỗng nên vật liệu này được sử dụng để cách âm, cách nhiệt và chế tạo những cấu kiện chịu được tải trọng động, tải trọng va chạm. Do đó, việc nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu bằng vật liệu rỗng đã và đang là đề tài thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước.

Chen & cs. (2016) đã sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko để phân tích dao động riêng và dao động cưỡng bức dầm làm bằng vật liệu rỗng có

cơ tính biến thiên. Sự phân bố của mật độ lỗ rỗng theo chiều dày được các tác giả khảo sát với hai quy luật: đối xứng và bất đối xứng. Mojahedin & cs. (2016) phân tích ổn định tấm tròn bằng vật liệu rỗng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT). Rezaei & Saidi (2015) đưa ra lời giải chính xác trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy để phân tích dao động riêng tấm dày bằng vật liệu rỗng với các điều kiện biên khác nhau. Gupta & Talha (2018) xây dựng lời giải số trên cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn (sử dụng phần tử  $C^0$  liên tục với 9 nút, 72 bậc tự do trên mỗi phần tử) để phân tích ổn định tấm bằng vật liệu rỗng có cơ tính biến thiên trong môi trường nhiệt độ. Li & cs. (2019) đã đưa ra lời giải bán giải tích trên cơ sở phương pháp năng lượng và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) để phân tích dao động vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu rỗng có cơ tính biến thiên, vỏ trụ được xét với các điều kiện biên bất kỳ. Ahmadi & Foroutan (2020) đã sử dụng lời giải bán giải tích và phương pháp giải tích để phân tích tĩnh và động lực học phi tuyến ứng xử ổn định trong môi trường nhiệt của vỏ trụ tròn nhiều lớp không hoàn hảo, trong đó lớp lõi làm bằng vật liệu rỗng có cơ tính biến thiên. Một nghiên cứu khác liên quan đến vật liệu rỗng cũng đã được thực hiện bởi Trần Minh Tú & cs. (2018). Bài báo sử dụng lý thuyết cắt bậc nhất (FSDT) của Reissner-Mindlin để phân tích dao động riêng của tấm chữ nhật làm bằng vật liệu rỗng với hai dạng phân bố (đối xứng và bất đối xứng). Dựa trên lý thuyết vỏ Love, kỹ thuật san đều tác dụng gân, cùng với việc áp dụng nguyên lý Hamilton, Nguyễn Văn Lợi & cs. (2018) đã xây dựng phương trình chuyển động của vỏ trụ tròn FGM có gân gia cường, có biên tựa khớp ở hai đầu vỏ. Đặng Xuân Hùng & Hương Quý Trường (2018) sử dụng các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau để phân tích dao động riêng dầm sandwich trên nền đàn hồi. Trong đó, cấu trúc vật liệu theo chiều dày với ba lớp gồm: hai lớp vật liệu lớp có cơ tính biến thiên (FGM) ở mặt trên và mặt dưới và lớp vật liệu rỗng (FG porous) ở giữa.

Tuy nhiên, những nghiên cứu được công bố về ứng xử động của kết cấu vỏ trụ tròn làm bằng

vật liệu rỗng vẫn còn khá hạn chế. Do vậy, bài báo này sẽ thiết lập lời giải giải tích cho bài toán dao động tự do của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT). Dạng nghiệm theo Navier được lựa chọn để xấp xỉ các thành phần chuyển vị của vỏ trụ tròn tựa khớp trên hai cạnh biên. Tần số và các dạng dao động của vỏ nhận được thông qua việc giải phương trình trị riêng. Độ tin cậy của mô hình và lời giải được minh chứng bằng cách so sánh kết quả tính toán với kết quả đã được công bố của các tác giả khác. Ngoài ra, ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng và các kích thước hình học đến tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn cũng sẽ được thực hiện trong nghiên cứu này.

## 2. MÔ HÌNH VỎ TRỤ TRÒN BẰNG VẬT LIỆU RỖNG

Xét vỏ trụ tròn có chiều dài  $L$ , bán kính  $R$ , chiều dày  $h$  trong hệ tọa độ  $xOz$  như ở hình 1. Mặt phẳng trung bình là mặt phẳng  $Ox\theta$  và  $z$  là phương chiều dày của vỏ.

Vỏ được làm bằng vật liệu rỗng có cơ tính biến đổi theo quy luật hàm phân bố lỗ rỗng dạng đối xứng (Chen & cs., 2016) như sau:

$$\begin{cases} E(z) = E_1 [1 - e_0 \cos(\frac{\pi z}{h})] \\ G(z) = G_1 [1 - e_0 \cos(\frac{\pi z}{h})] \\ \rho(z) = \rho_1 [1 - e_m \cos(\frac{\pi z}{h})] \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó,  $E_1$ ,  $G_1$ ,  $\rho_1$  lần lượt là các giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng. Các hệ số rỗng  $e_0$  cho mô đun đàn hồi và hệ số rỗng  $e_m$  cho khối lượng riêng được tính như sau:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 - \frac{E_1}{E_2} = 1 - \frac{G_1}{G_2} \\ e_m &= 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \sqrt{1 - e_0} \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó,  $E_2$ ,  $G_2$ ,  $\rho_2$  là các giá trị nhỏ nhất tương ứng của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng. Từ đồ thị biến thiên của mô đun đàn hồi kéo - nén của vật

liệu rỗng được minh họa trên hình 2 cho thấy theo qui luật phân bố lỗ rỗng đối xứng thì giá trị lớn nhất của các hằng số vật liệu đạt được ở mặt trên và mặt dưới của vỏ, giá trị nhỏ nhất đạt được tại mặt trung bình nơi có mật độ lỗ rỗng lớn nhất.

### 3. PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO VỎ TRỤ TRÒN THEO FSDT

#### 3.1. Các thành phần chuyển vị, biến dạng

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, chuyển vị của một điểm bất kỳ trong vỏ được giả thiết như sau (Reddy, 2006):

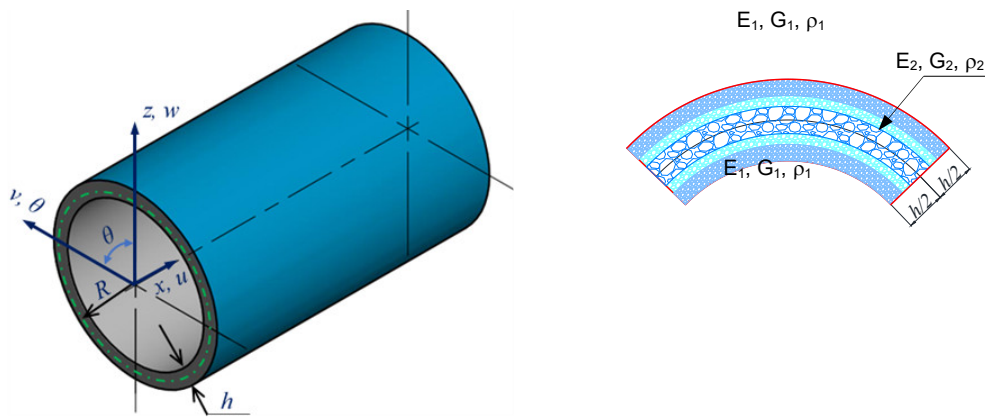
$$\begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) + z\phi_x(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, z, t) &= v_0(x, \theta, t) + z\phi_\theta(x, \theta, t); \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (3)$$

Trong đó,  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương  $x, \theta, z$ ;  $\phi_x, \phi_\theta$  là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục  $\theta, x$ .

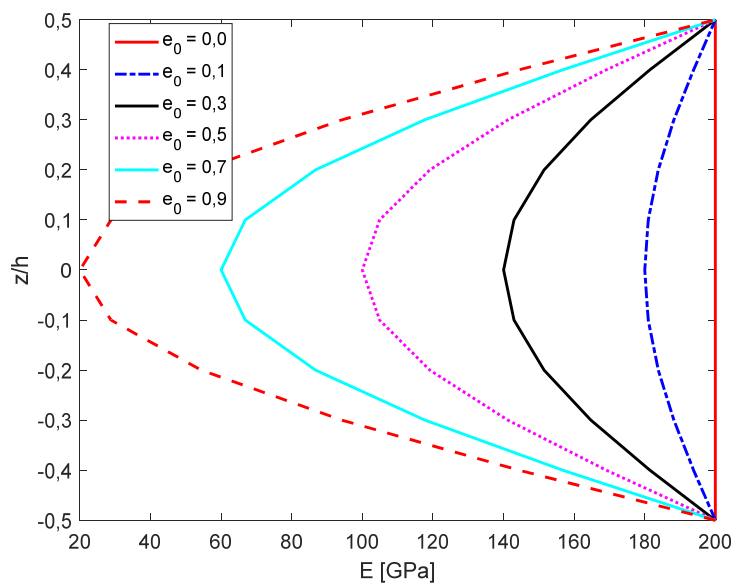
Các thành phần biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị thông qua các biểu thức quan hệ chuyển vị - biến dạng, biểu diễn dưới dạng:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\}^T + z\{\kappa\}^T \quad (4)$$

Trong đó,  $\{\varepsilon\}, \{\varepsilon_0\}, \{\kappa\}$  được thể hiện theo công thức (5).



Hình 1. Vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu rỗng



Hình 2. Mô đun đàn hồi kéo (nén) thay đổi theo qui luật phân bố lỗ rỗng đối xứng

### 3.2. Các thành phần ứng suất, nội lực

Quan hệ giữa ứng suất - biến dạng trong vỏ trụ tròn bằng vật liệu rỗng được theo công thức (6) (Reddy, 2006). Trong đó,  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$ ,  $Q_{44}$ ,  $Q_{55}$ ,  $Q_{66}$  được biểu diễn theo công thức (7).

Các thành phần nội lực trong vỏ trụ tròn được xác định theo các biểu thức định nghĩa

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{x\theta}, \gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}\}^T \\ \{\varepsilon^0\} &= \{\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{\theta\theta}^0, \varepsilon_{x\theta}^0, \gamma_{xz}^0, \gamma_{\theta z}^0\}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{R\partial\theta} + \frac{w_0}{R}, \frac{\partial u_0}{R\partial\theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \frac{\partial w_0}{R\partial\theta} + \phi_\theta - \frac{v_0}{R} \right\}^T \\ \{\kappa\} &= \{\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}, 0, 0\}^T = \left\{ \frac{\partial\phi_x}{\partial x}, \frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}, \frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}, 0, 0 \right\}^T \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = [Q] \{\varepsilon\} \quad (6)$$

$$Q_{11}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; \quad Q_{22}(z) = Q_{11}(z); \quad Q_{12}(z) = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}; \quad Q_{21}(z) = Q_{12}(z); \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz; \quad \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{\theta z} \end{Bmatrix} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} dz \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \\ Q_{xz} \\ Q_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz; \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z dz; \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z^2 dz; \quad A_{44} = A_{55} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz \quad (10)$$

theo công thức (8). Với  $k = 5/6$  là hệ số hiệu chỉnh cắt.

Quan hệ ứng lực - chuyển vị có thể biểu diễn tổng quát theo công thức 9.

Trong đó:  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $A_{44}$ ,  $A_{55}$  được biểu hiện theo công thức (10);  $Q_{ij}$  được cho bởi các biểu thức trong phương trình (7).

### 3.3. Hệ phương trình chuyển động theo các thành phần chuyển vị của vỏ trụ tròn

Thay các thành phần ứng suất, biến dạng và chuyển vị vào nguyên lý Hamilton, sau đó thực hiện tích phân từng phần và biến đổi thu được hệ phương trình chuyển động của vỏ trụ như sau (Bahadori & Najafizadeh, 2015):

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{Q_{\theta z}}{R} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \\ \delta w_0 : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (11) \\ \delta \phi_x : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_{xz} &= I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \delta \phi_\theta : \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_{\theta z} &= I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Trong đó, các thành phần mô men quán tính được tính theo công thức:

$$I_0, I_1, I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz \quad (12)$$

Trong nghiên cứu này, hệ phương trình chuyển động (11) được giải bằng cách áp dụng nghiệm Navier cho trường hợp vỏ trụ tròn có hai đầu là liên kết tựa khớp.

### 3.4. Dạng nghiệm Navier cho vỏ trụ tròn bằng vật liệu rỗng

Xét vỏ trụ tròn bằng vật liệu rỗng có kích thước hình học như ở hình 1, liên kết khớp trên hai cạnh biên. Hàm chuyển vị cần tìm thỏa mãn điều kiện biên đã lựa chọn được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép có dạng:

$$\begin{aligned} u_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos(\alpha x) \sin(n\theta) e^{i\omega_{mn} t} \\ v_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin(\alpha x) \cos(n\theta) e^{i\omega_{mn} t} \\ w_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin(\alpha x) \sin(n\theta) e^{i\omega_{mn} t} \quad (13) \\ \phi_x(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{0xmn} \cos(\alpha x) \sin(n\theta) e^{i\omega_{mn} t} \end{aligned}$$

$$\phi_\theta(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{0\theta mn} \sin(\alpha x) \cos(n\theta) e^{i\omega_{mn} t}$$

trong đó:  $\alpha = \frac{m\pi}{L}$  với  $m, n$  là số nửa bước

sóng hình sin theo phương  $x, \theta$ ;  $\omega_{mn}$  là tần số dao động riêng (tần số góc) tương ứng với dạng dao động  $(m, n)$ .

Thay các biểu thức (13) vào (4), (5), sau đó thay vào (9), tiếp đến thay vào hệ phương trình chuyển động (11), thực hiện các biến đổi, rút gọn nhận được hệ phương trình trị riêng dưới dạng rút gọn như sau:

$$([S]_{5 \times 5} - \omega^2 [M]_{5 \times 5}) \{u\}_{5 \times 1} = \{0\}_{5 \times 1} \quad (14)$$

trong đó:  $[S]$  là ma trận các hệ số độ cứng,  $[M]$  là ma trận khối lượng.

$$\{u\} = \{u_{0mn} \quad v_{0mn} \quad w_{0mn} \quad \phi_{0xmn} \quad \phi_{0\theta mn}\}^T \quad (15)$$

Giải bài toán tìm trị riêng của phương trình  $[S] - \omega^2 [M] = 0$  thông qua việc sử dụng phần mềm Matlab tìm được tần số dao động riêng  $\omega_{mn}$  và các dạng dao động của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu rỗng.

## 4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

### 4.1. Ví dụ kiểm chứng

Để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình lý thuyết cũng như chương trình máy tính đã thiết lập, một ví dụ so sánh được thực hiện. Kết quả tính toán tần số dao động riêng của vỏ trụ được bằng chương trình đã thiết lập được so sánh với kết quả thu được theo phương pháp Ritz bởi tác giả Loy & cs. (1999). Trong ví dụ này, 10 tần số không thứ nguyên  $\bar{\omega} = \omega R \sqrt{(1-\nu^2)\rho_1 / E_1}$  nhỏ nhất của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu đồng chất, đẳng hướng với điều kiện biên tựa khớp hai đầu được tính toán và so sánh trong bảng 1. Vỏ trụ có chiều dày  $h = 0,01$  (m), tỷ số giữa chiều dày và bán kính  $h/R = 0,01$ , tỷ số giữa chiều dài và bán kính trụ  $L/R = 20$ , mô đun đàn hồi kéo-nén  $E = 380 \times 109$  (Pa), khối lượng riêng  $\rho = 8.166$  (kg/m<sup>3</sup>) và hệ số Poisson  $\nu = 0,3$ . Ví dụ kiểm chứng này được tính toán bằng chương trình thiết lập trong nghiên cứu này khi cho hệ số  $e_0 = 0$ .

**Bảng 1. Bảng so sánh các tần số dao động riêng không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của vỏ trụ tròn**

n	Mô hình		Sai lệch (%)
	Loy & cs. (1999)	Bài báo (FSDT)	
1	0,016102	0,016102	0,00
2	0,009387	0,009387	0,00
3	0,022108	0,022105	0,01
4	0,042096	0,042085	0,03
5	0,068008	0,067978	0,04
6	0,099730	0,099665	0,06
7	0,137239	0,137117	0,09
8	0,180527	0,180317	0,12
9	0,229594	0,229254	0,15
10	0,284435	0,283916	0,18

**Bảng 2. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng  $e_0$  đến  $\bar{\omega}$  của vỏ trụ tròn**

m	n	Hệ số mật độ lỗ rỗng $e_0$					
		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
1	1	0,0161	0,0158	0,0153	0,0147	0,0142	0,0140
	2	0,0094	0,0093	0,0092	0,0092	0,0092	0,0097
	3	0,0221	0,0221	0,0220	0,0222	0,0226	0,0241
	4	0,0421	0,0420	0,0420	0,0422	0,0431	0,0460
	5	0,0680	0,0679	0,0678	0,0682	0,0696	0,0743
2	1	0,0591	0,0581	0,0562	0,0541	0,0521	0,0514
	2	0,0220	0,0217	0,0210	0,0204	0,0198	0,0198
	3	0,0242	0,0241	0,0240	0,0240	0,0243	0,0257
	4	0,0426	0,0425	0,0425	0,0427	0,0436	0,0464
	5	0,0683	0,0681	0,0681	0,0685	0,0699	0,0746

Kết quả so sánh trong bảng đã cho thấy sự chính xác và độ tin cậy của mô hình và chương trình mà nghiên cứu đã thực hiện. Sự chênh lệch lớn nhất chỉ là 0,18% ở tần số tương ứng với  $(m, n) = (1, 10)$ . Đây là cơ sở để nghiên cứu tiếp tục khảo sát các ví dụ số tiếp theo.

**4.2. Một số ví dụ khảo sát**

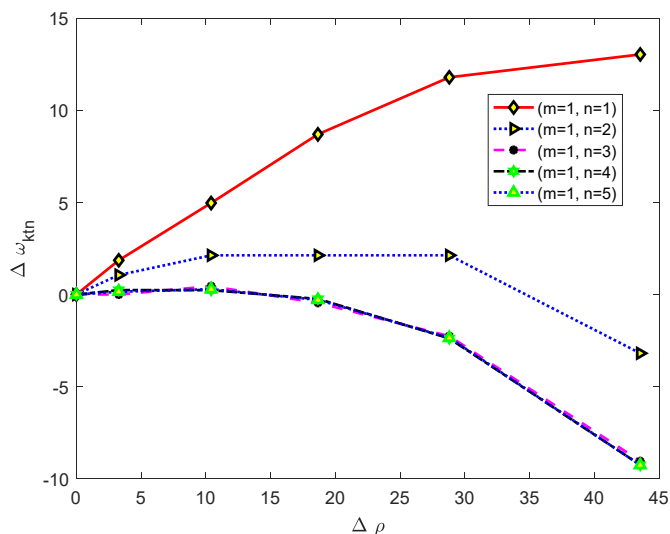
Trong phần này, bài báo sẽ thực hiện một số ví dụ số cụ thể để khảo sát sự ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng  $e_0$  và các tham số kích thước hình học đến tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn. Vỏ trụ tròn được xét trong phần này được làm bằng vật liệu rỗng, tựa khớp trên hai cạnh biên, chiều dày  $h = 0,01$  (m), mô đun đàn hồi lớn nhất

$E_1 = 380 \times 10^9$  (Pa), các thông số khác sẽ được trình bày trong từng ví dụ cụ thể.

**4.2.1. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng ( $e_0$ )**

Trong ví dụ này, năm tần số dao động riêng không thứ nguyên đầu tiên  $\bar{\omega}$  của vỏ trụ có  $h/R = 0,01$ ,  $L/R = 20$  được tính toán với mật độ lỗ rỗng  $e_0$  thay đổi từ 0 đến 0,9 và trình bày trong bảng 2.

Từ kết quả tính cho thấy khi mật độ lỗ rỗng  $e_0$  tăng lên làm cho tần số dao động riêng của trụ thay đổi, tuy nhiên sự thay đổi ở tần số dao động ứng với các dạng dao động khác nhau lại khác nhau. Sự thay đổi này được biểu diễn rõ hơn bằng các đồ thị trên hình 3.



Hình 3. Biến thiên tần số dao động riêng và khối lượng riêng vỏ trụ

Trong đó, các đại lượng trên hình 3 được tính theo công thức sau:

$$\Delta\omega_{ktn} = \frac{\bar{\omega}_{e_0} - \bar{\omega}_{e_0=0}}{\bar{\omega}_{e_0=0}} 100\%$$

$$\Delta\rho = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)_{e_0=0} dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)_{e_0} dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)_{e_0=0} dz} 100\% \quad (16)$$

Công thức (16) cho thấy khi mật độ lỗ rỗng tăng lên sẽ làm cho độ cứng của kết cấu giảm nhưng cũng đồng thời làm cho khối lượng của kết cấu giảm. Cụ thể, khi mật độ lỗ rỗng  $e_0$  tăng từ 0 đến 0,9 làm cho khối lượng riêng của vỏ trụ giảm tương ứng đến xấp xỉ 45%. Đồ thị trên Hình 3 chỉ ra quan hệ giữa giảm khối lượng và giảm độ cứng là không tuyến tính, do đó tùy theo các trường hợp cụ thể, các dạng dao động được xét sự thay đổi tần số sẽ có những qui luật khác nhau.

#### 4.2.2. Ảnh hưởng của tỉ lệ kích thước vỏ (L/R)

Vỏ trụ tròn được xét trong ví dụ này có mật độ phân bố lỗ rỗng  $e_0 = 0,5$ . Kết quả tính các tần số dao động riêng không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  tương ứng với các tỷ lệ  $h/R$  và  $L/R$  được trình bày trong bảng 4.

Kết quả tính trình bày trong bảng 4 cho thấy khi tỷ lệ chiều dài so với bán kính của trụ  $L/R$  tăng lên làm cho tần số dao động riêng của

trụ giảm. Độ giảm tần số trong khoảng giá trị của tỷ số  $L/R$  từ 5 đến 12 là lớn, sau đó thì tần số dao động của trụ giảm chậm dần khi tỷ số  $L/R$  tiếp tục tăng lên. Các dạng dao động khác nhau có tỷ lệ giảm tần số khác nhau.

#### 4.2.3. Ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dày/bán kính vỏ (h/R)

Ảnh hưởng của tỷ số  $h/R$  đến dao động của vỏ trụ làm bằng vật liệu rỗng trong nghiên cứu này được biểu diễn trên hình 4. Trong ví dụ này, các thông số khác của trụ được lựa chọn như sau:  $L/R = 10$ ,  $e_0 = 0,5$ ,  $m = 1$ , ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ).

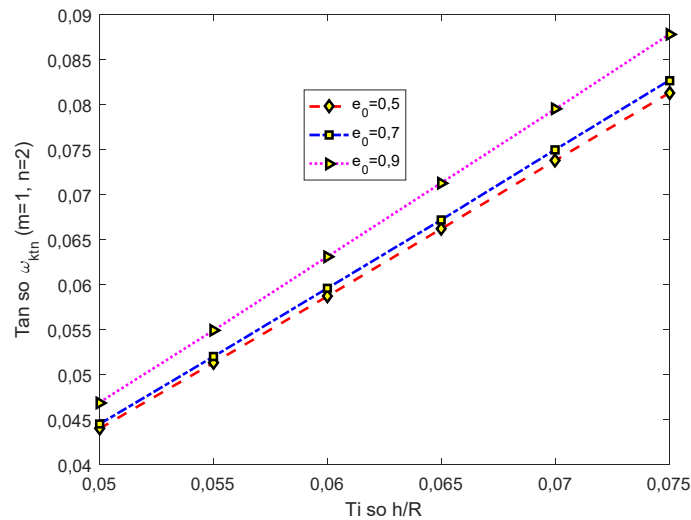
Đồ thị trên hình 4 chỉ ra rằng, với bất kỳ mật độ lỗ rỗng như thế nào thì khi chiều dày của vỏ trụ nói riêng và của kết cấu nói chung tăng lên sẽ làm cho độ cứng của kết cấu tăng lên, quan hệ giữa tần số  $\bar{\omega}$  và tỷ lệ  $h/R$  theo qui luật đường thẳng là phù hợp với giới hạn phân tích tích tuyến tính của nghiên cứu này.

#### 4.2.4. Một số dạng dao động riêng (mode) của vỏ trụ tròn

Bên cạnh việc tính toán tần số thì việc xác định và biểu diễn được hình dạng của kết cấu khi dao động cũng có ý nghĩa kỹ thuật và là một trong những yêu cầu trong bài toán phân tích dao động tự do của kết cấu. Trong nghiên cứu này, một số dạng dao động của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu rỗng có liên kết khớp hai đầu được xác định và trình bày như trên hình 5.

**Bảng 4. Ảnh hưởng của tỉ lệ L/R đến  $\bar{\omega}$  của vỏ trụ tròn ( $m = 1$ )**

h/R	n	Tỉ lệ L/R					
		5	10	12	15	17	20
0,05	1	0,1707	0,0541	0,0389	0,0256	0,0202	0,0148
	2	0,0818	0,0440	0,0416	0,0401	0,0397	0,0393
	3	0,1194	0,1109	0,1104	0,1100	0,1098	0,1097
	4	0,2150	0,2103	0,2098	0,2095	0,2094	0,2093
	5	0,3418	0,3376	0,3372	0,3369	0,3367	0,3366
0,08	1	0,1708	0,0542	0,0389	0,0257	0,0202	0,0148
	2	0,0979	0,0662	0,0643	0,0631	0,0628	0,0624
	3	0,1847	0,1758	0,1751	0,1746	0,1744	0,1742
	4	0,3385	0,3319	0,3313	0,3308	0,3306	0,3304
	5	0,5355	0,5293	0,5287	0,5282	0,5280	0,5278
0,10	1	0,1709	0,0543	0,0390	0,0257	0,0203	0,0149
	2	0,1104	0,0813	0,0796	0,0784	0,0780	0,0777
	3	0,2277	0,2181	0,2173	0,2167	0,2164	0,2162
	4	0,4177	0,4100	0,4092	0,4086	0,4083	0,4081
	5	0,6574	0,6500	0,6492	0,6486	0,6484	0,6481



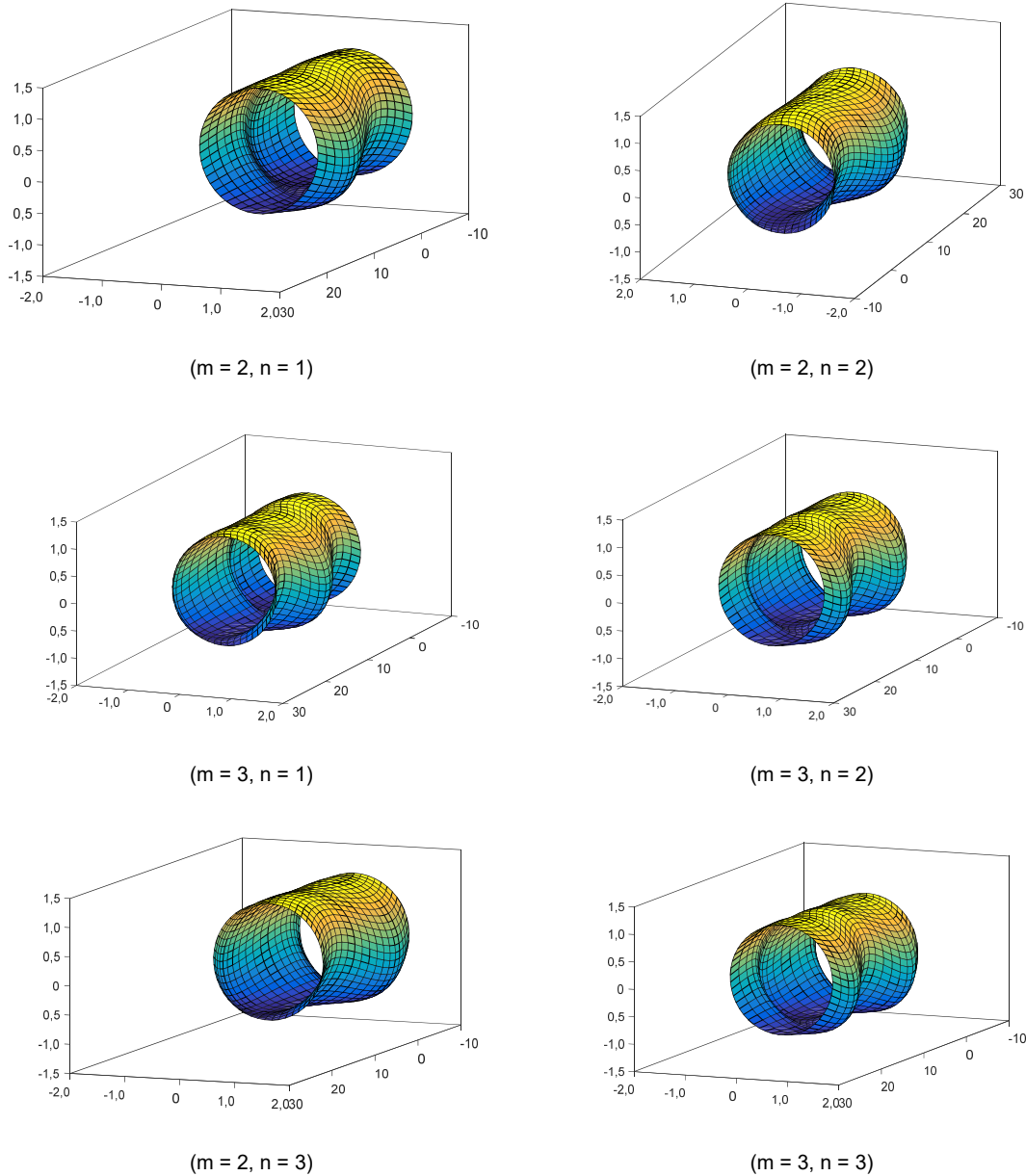
**Hình 4. Ảnh hưởng của tỉ lệ h/R đến  $\bar{\omega}$  của vỏ trụ tròn**

## 5. KẾT LUẬN

Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), bài báo đã xây dựng lời giải giải tích để phân tích dao động riêng vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu rỗng, một loại vật liệu mới đang được quan tâm nghiên cứu. Lỗ rỗng trong vật liệu được giả phân bố đối xứng theo tọa độ chiều dày vỏ với quy luật hàm cosine đơn giản. Nguyên lý Halminton được sử dụng để rút ra hệ phương trình chuyển động của vỏ trụ. Các thành phần chuyển vị của vỏ

trụ với điều kiện biên tựa khớp hai đầu được xấp xỉ bằng nghiệm Navier dạng các chuỗi lượng giác kép. Ví dụ so sánh đã cho thấy độ chính xác của mô hình và chương trình tính. Ngoài ra, các ví dụ cũng được thực hiện nhằm khảo sát ảnh hưởng của hệ số mật độ lỗ rỗng và các tham số hình học đến tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn bằng vật liệu rỗng. Các kết quả trình bày trong nghiên cứu này có thể là nguồn tham khảo đối với các nghiên cứu liên quan đến vỏ trụ nói chung và vỏ trụ làm bằng vật liệu rỗng nói riêng.





**Hình 5. Một số dạng dao động riêng (mode) của vỏ trụ tròn**

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Bahadori R. & Najafizadeh M. (2015). Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded axisymmetric cylindrical shell on Winkler–Pasternak elastic foundation by First-order Shear Deformation Theory and using Navier-differential quadrature solution methods. *Applied Mathematical Modelling*. 39(16): 4877-4894.
- Chen Da, Yang Jie & Kitipornchai Sritawat (2016). Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 108: 14-22.
- Gupta A. & Talha M. (2018). Stability characteristics of porous functionally graded plate in thermal environment. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. IOP Publishing.
- Li Haichao, Pang Fuzhen, Chen Hailong & Du Yuan (2019). Vibration analysis of functionally graded porous cylindrical shell with arbitrary boundary restraints by using a semi analytical method. *Composites Part B: Engineering*. 164: 249-264.
- Ahmadi H. & Foroutan K. (2020). Nonlinear static and dynamic thermal buckling analysis of imperfect multilayer FG cylindrical shells with an FG porous

- core resting on nonlinear elastic foundation. *Journal of Thermal Stresses*. 43(5): 629-649.
- Nguyễn Văn Lợi, Trần Bình Định & Chu Thanh Bình. (2018). Phân tích tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên có gân gia cường. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, Đại học Xây dựng*. 12(6): 20-28.
- Hung D.X. & Truong H.Q. (2018). Free vibration analysis of sandwich beams with FG porous core and FGM faces resting on Winkler elastic foundation by various shear deformation theories. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE*. 12(3): 23-33.
- Loy C.T., Lam K.Y. & Reddy J.N. (1999). Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*. 41(3): 309-324.
- Mojahedin Arvin, Jabbari M., Khorshidvand A.R. & Eslami M.R. (2016). Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures*. 99: 83-90.
- Reddy J.N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press.
- Rezaei A. & Saidi A. (2015). Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials. *Composite Structures*. 134: 1051-1060.
- Lê Thanh Hải, Trần Minh Tú & Lê Xuân Huỳnh (2018). Phân tích dao động riêng của tấm bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, Đại học Xây dựng*. 12(7): 9-19.