ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ NĂM ĐIỂM CỦA NEVANLINNA CHO HÀM PHÂN HÌNH TRÊN MIỀN VÀNH KHĂN

Nguyễn Thị Thu Hằng
Khoa Toán và KHTN
Email: hangntt82@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 10/10/2019
Ngày PB đánh giá: 26/10/2019
Ngày duyệt đăng: 25/11/2019

TÓM TẮT: Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh định lý về sự xác định của hàm phân hình trên mặt phẳng phức. Từ đó, lý thuyết Nevanlinna được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học. Năm 2005, A. Ya. Khrystiyanyn và A. A. Kondratyuk nghiên cứu một số kết quả về lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình trên miền vành khăn. Năm 2009, Cao - Yi đã chứng minh định lý về tính duy nhất của hàm phân hình có cùng ảnh ngược của một số giá trị trên miền vành khăn. Tiếp tục hướng nghiên cứu đó và cải tiến kết quả của các tác giả sang nghiên cứu về đạo hàm của các hàm phân hình, chúng tôi xây dựng định lý năm điểm của Nevanlinna cho đạo hàm của hàm phân hình khi các hàm phân hình có cùng ảnh ngược của năm giá trị phân biệt trên miền vành khăn.

Từ khóa: *Lý thuyết Nevanlinna, hàm phân hình.*

NEVANLINNA'S FIVE-VALUED THEOREM APPLICATION FOR MEROMORPHIC FUNCTIONS ON ANNULI

ABSTRACT: In 1926, Nevanlinna showed that two nonconstant distinct meromorphic functions f and g on $\mathbb{C}$ cannot have the same inverse images of five distinct values. Since then, Nevanlinna's theory has been applied in different mathematical fields. In 2005, A. Ya. Khrystiyanyn and A. A. Kondratyuk investigagted and proposed some results on the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. In 2009, Cao and Yi proved the uniqueness of meromorphic functions sharing some values on annuli. Basing on the researching methods and improved results of the previous authors on meromorphic functions, we generalise Nevanlinnas five-value theorem for derivatives of meromorphic functions on annuli by considering weaker assumptions of sharing five-values on annuli.

Keywords: *Nevanlinna theory; meromorphic functions.*

---

1. GIỚI THIỆU

Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh được rằng nếu hai hàm phân hình khác hằng f và g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ có cùng ảnh ngược của 5 giá trị phân biệt thì $f = g$ (Định lý 5 điểm). Sau đó, việc ứng dụng lý thuyết Nevanlinna vào việc nghiên cứu tính duy nhất của hàm phân hình là một chủ đề được nhiều nhà toán học quan tâm và ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Năm 2005, A. Ya. Khrystiyanyn [5] và A. A. Kondratyuk [6] nghiên cứu một số kết quả về lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình trên miền vành khăn. Năm 2009, Cao - Yi [1] đã chứng minh định lý về tính duy nhất của hàm phân hình có cùng ảnh ngược của một số giá trị trên miền vành khăn. Trong [6], tác giả đã tìm mối liên hệ giữa định lý ánh xạ liên thông thì mỗi miền liên thông đôi là tương đương với miền vành khăn $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, $0 \le r < R \le +\infty$. Ta cần xem xét đồng thời các trường hợp $r = 0,\ R = +\infty$ và $0 < r < R < +\infty$. Trong trường hợp thay z bởi $\frac{z}{Rr}$, khi đó, miền vành khăn được đưa về miền: $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\right\}$, trong đó $R_0 = \sqrt{\frac{R}{r}}$. Do đó, trong 2 trường hợp thì mọi miền vành khăn đều bất biến với việc thay z thành nghịch đảo $\frac{1}{z}$. Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập định lý về tính duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình có cùng ảnh ngược của năm điểm trên miền vành khăn.

2. MỘT SỐ CÔNG THỨC CƠ BẢN

Cho $f(z)$ là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, ta có các hàm Nenalinna cổ điển cho hàm phân hình f như sau:

$$N(R,f) = \int_0^R \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\log R,$$

$$m(R,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\mathrm{Re}^{i\theta})| d\theta,$$

$$T(R,f) = N(R,f) + m(R,f).$$

Trong đó, $\log^+ x = max\{\log x, 0\}$ và $n(t,f)$ là hàm đếm các cực điểm của hàm f trong $\{z : |z| \le t\}$.

Sau đây, chúng tôi xây dựng các hàm Nevanlinna cho hàm phân hình trên miền vành khăn $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\right\}$ như sau:

$$N_1(R,f) = \int_{\frac{1}{R}}^{1} \frac{n_1(t,f)}{t} dt; \quad N_2(R,f) = \int_1^R \frac{n_2(t,f)}{t} dt;$$

$$m_0(R,f) = m(R,f) + m\left(\frac{1}{R}, f\right) - 2m(1,f),$$

$$N_0(R,f) = N_1(R,f) + N_2(R,f).$$

Trong đó, $n(t,f)$ lần lượt là hàm đếm các cực điểm của hàm f trong $\{z \in \mathbb{C} : t < |z| \le 1\}$ và $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \le t\}$. Hàm đặc trưng Nevanlinna của f trên miền vành khăn A được cho bởi:

$T_0(R,f) = m_0(R,f) + N_0(R,f)$.

Định nghĩa 2.1: *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên miền vành khăn* $A(R_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0 \right\}$, *trong đó* $1 < R_0 < +\infty$. *Hàm f được gọi là một hàm phân hình siêu việt (tương ứng chấp nhận được) trên miền vành khăn* $A(R_0)$ *nếu thỏa mãn:*

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{T_0(R,f)}{\log R} = \infty;\ 1 < R < R_0 = +\infty,$$

hoặc $\limsup\limits_{R\to R_0} \frac{T_0(R,f)}{-\log(R_0 - R)} = \infty;\ 1 < R < +\infty$ tương ứng.

Do đó, một hàm phân hình siêu việt hoặc chấp nhận được trên A nếu $S(R,f) = o(T_0(R,f))$ đúng với mọi $1 < R < R_0$ trừ tập Δ_R hoặc tập Δ'_R tương ứng được xét đến trong định lý 2.2.

Ta xây dựng các hàm:

$$\overline{N}_0\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = \overline{N}_1\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_2\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$$
$$= \int_{\frac{1}{R}}^{1} \frac{\overline{n}_1\left(t, \frac{1}{f-a}\right)}{t} dt + \int_{1}^{R} \frac{\overline{n}_2\left(t, \frac{1}{f-a}\right)}{t} dt.$$

Trong đó, mỗi không điểm của hàm $(f-a)$ chỉ tính một lần, kí hiệu: $\overline{n}_1^{(k}\left(t, \frac{1}{f-a}\right)$; $\overline{n}_1^{k)}\left(t, \frac{1}{f-a}\right)$ là hàm đếm cực điểm của hàm $\frac{1}{f-a}$ có bội $\leq$ k (hoặc > k) trên $\{z \in \mathbb{C} : t < |z| \leq 1\}$ với mỗi điểm ta đếm một lần. Tương tự, ta kí hiệu các hàm tương ứng $\overline{N}_1^{k)}(t,f), \overline{N}_1^{(k}(t,f); \overline{N}_2^{k)}(t,f); \overline{N}_2^{(k}(t,f); \overline{N}_0^{k)}(t,f); \overline{N}_0^{(k}(t,f)$.

Định lý 2.1. [5] (Định lý Cơ bản thứ nhất) *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên* $A(R_0)$, *trong đó* $1 < R_0 \leq +\infty$. *Khi đó,*

$$T_0\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T_0(R,f) + O(1) \qquad (2.1)$$

với điểm $a \in \mathbb{C}$ cố định.

Định lý 2.2. [6] (Bổ đề đạo hàm Logarit). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên* $A(R_0)$, *trong đó* $1 < R_0 \leq +\infty$ *và* $\alpha \geq 0$. *Khi đó:*

i) Trong trường hợp $R_0 = +\infty$ *thì*

$$m_0\left(R,\frac{f'}{f}\right)=O(\log(RT_0(R,f))) \tag{2.2}$$

với $R\in(1,+\infty)$ *trừ tập* Δ_R *sao cho* $\int_{\Delta_R} R^{\alpha-1}dR<+\infty.$

ii) Trong trường hợp $R_0<+\infty$ *thì*

$$m_0\left(R,\frac{f'}{f}\right)=O\left(\log\left(\frac{T_0(R,f)}{R_0-R}\right)\right) \tag{2.3}$$

với $R\in(1,R_0)$ *trừ tập* Δ'_R *sao cho* $\int_{\Delta'_R}\frac{dR}{(R_0-R^{\alpha-1})}<+\infty.$

Định lý 2.3. [1] (Định lý Cơ bản thứ hai trên miền vành khăn) *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên vành khăn* $A(R_0)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{R_0}<|z|<R_0\right\}$ *trong đó* $1<R<R_0$. *Cho* $a_1,...,a_q$ *là q số phức phân biệt trong mặt phẳng phức* $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$ *và* $k_1,...,k_q$ *là q số nguyên dương, số thực* $\lambda\geq 0$. *Khi đó:*

$$(i)\quad (q-2)T_0(R,f) < \sum_{j=1}^{q}N_0\left(R,\frac{1}{f-a_j}\right) - N_0^{(1)}(R,f)+S(R,f),$$

$$(ii)\quad (q-2)T_0(R,f) < \sum_{j=1}^{q}\overline{N_0}\left(R,\frac{1}{f-a_j}\right)+S(R,f),$$

$$(iii)\quad (q-2)T_0(R,f) < \sum_{j=1}^{q}\frac{k_j}{k_j+1}\overline{N}_0^{k_j)}\left(R,\frac{1}{f-a_j}\right)+\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{k_j+1}N_0\left(R,\frac{1}{f-a_j}\right)+S(R,f),$$

$$(iv)\quad \left(q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{k_j+1}\right)T_0(R,f) < \sum_{j=1}^{q}\frac{k_j}{k_j+1}\overline{N}_0^{k_j)}\left(R,\frac{1}{f-a_j}\right)+S(R,f),$$

trong đó $N_0^1(R,f) = N_0(R,\frac{1}{f'})+2N_0(R,f)-N_0(R,f')$.

Hơn nữa:

1. *Nếu* $R=+\infty$ *thì* $m_0\left(R,\frac{f'}{f}\right)=O(\log(RT_0(R,f)))$ *với* $R\in(1,+\infty)$ *trừ tập* Δ_R *sao cho* $\int_{\Delta_R}R^{\alpha-1}dR<+\infty$;

2. *Nếu* $R<+\infty$ *thì* $m_0\left(R,\frac{f'}{f}\right)=O\left(\log\left(\frac{T_0(R,f)}{R-R_0}\right)\right)$ *với* $R\in(1,R_0)$ *trừ tập* Δ'_R *sao cho* $\int_{\Delta'_R}\frac{dR}{(R-R^{\alpha-1})}<+\infty$.

3. KẾT QUẢ CHÍNH

Định nghĩa 2.1. *Cho* $f(z)$ *là hàm phân hình siêu việt hoặc hàm phân hình chấp nhận được trên miền vành khăn* $A(R_0)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{R_0}<|z|<R_0\right\}$, *trong đó* $1<R_0\le+\infty$ *và a là một giá trị trong mặt phẳng phức mở rộng* $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$. *Ta kí hiệu:*

$$E(a,f)=\{z\in\mathbb{C}\mid f(z)-a=0\}$$

là tập không điểm của $f(z)-a$ *trong đó mỗi không điểm được tính số lần bằng số bội,*

$$\overline{E}(a,f)=\{z\in\mathbb{C}\mid f(z)-a=0\}$$

là tập không điểm của $f(z)-a$ *trong đó các không điểm chỉ được đếm một lần.*

Định lý 3.1 sau đây là kết quả chính của bài báo:

Định lý 3.1: *Cho* $f_1(z),f_2(z)$ *là hai hàm phân hình siêu việt trên miền vành khăn* $A(R_0)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{R_0}<|z|<R_0\right\}$, *trong đó* $1<R_0\le+\infty$. *Cho* $a_1,...,a_q$ *là q số phức phân biệt trong mặt phẳng phức* $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$, *trong đó* $q\ge 5$ *và k là một số nguyên không âm. Khi đó, nếu*

i) $E(a_j,f_1^{(k)})\subset E(a_j,f_2^{(k)})$ *với mọi* $1\le j\le q$, (3.1)

ii) $E(0,f_1)\subset E(0,f_1^{(k)})$ *và* $E(0,f_2)\subset E(0,f_2^{(k)})$, (3.2)

iii)
$$\frac{\underline{\lim}_{R\to\infty}\sum_{j=1}^{q}N_0\left(R,\frac{1}{f_1^{(k)}-a_j}\right)}{\underline{\lim}_{R\to\infty}\sum_{j=1}^{q}N_0\left(R,\frac{1}{f_2^{(k)}-a_j}\right)}>\frac{k+1}{q-(k+3)} \tag{3.3}$$

thì $f_1^{(k)}(z)\equiv f_2^{(k)}(z)$.

Chứng minh:

Trước tiên, ta chứng minh:

$$N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N_0\left(R,\frac{1}{f}\right)+T_0\left(R,f^{(k)}\right)-T_0\left(R,f\right)+S(R,f)$$

và

$$N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N_0\left(R,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}_0\left(R,f^{(k)}\right)+S(R,f). \tag{3.4}$$

Thật vậy, ta có:

$$m_0\left(R,\frac{1}{f}\right)\le m_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+m_0\left(R,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$$

$$m_0\left(R,\frac{1}{f}\right)\le m_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(R,f)$$

nên $m_0\left(R,\dfrac{1}{f}\right)+N_0\left(R,\dfrac{1}{f}\right)\le m_0\left(R,\dfrac{1}{f^{(k)}}\right)+N_0\left(R,\dfrac{1}{f^{(k)}}\right)+S(R,f).$

Áp dụng định lý cơ bản thứ nhất trên miền vành khăn ta có:

$$T_0(R,f)-N_0\left(R,\frac{1}{f}\right)\le T_0(R,f^{(k)})-N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(R,f).$$

Do đó,
$$\begin{aligned}N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)&\le T_0(R,f^{(k)})-T_0(R,f)+N_0\left(R,\frac{1}{f}\right)+S(R,f)\\&\le T_0(R,f)+k\overline{N}_0\left(R,f\right)-T_0(R,f)+N_0\left(R,\frac{1}{f}\right)+S(R,f)\\&\le k\overline{N}_0\left(R,f\right)+N_0\left(R,\frac{1}{f}\right)+S(R,f).\end{aligned}$$

Vậy ta chứng minh được (3.4).

Áp dụng định lý cơ bản thứ hai cho hàm $f^{(k)}(z)$ trên miền vành khăn và ba giá trị phân biệt $0,a_j,\infty$ ta có:

$$qT_0(R,f^{(k)})<\overline{N_0}(R,f)+N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\sum_{j=1}^{q}N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right)-N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(R,f).$$

Mặt khác, từ (3.4) ta có:

$$T_0(R,f)<T_0(R,f^{(k)})+N_0\left(R,\frac{1}{f}\right)-N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(R,f).$$

Do đó

$$\begin{aligned}qT_0(R,f)&<qT_0(R,f^{(k)})+qN_0\left(R,\frac{1}{f}\right)-qN_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(R,f).\\&<\overline{N_0}(R,f)+N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\sum_{j=1}^{q}N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}-a_j}\right)-N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\\&\quad+qN_0\left(R,\frac{1}{f}\right)-qN_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(R,f).\end{aligned}$$

Nên ta có:

$$\begin{aligned}qT_0(R,f)<\overline{N_0}(R,f)+\sum_{j=1}^{q}N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}-a_j}\right)-N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)-(q-1)N_0\left(R,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\\+qN_0\left(R,\frac{1}{f}\right)+S(R,f).\end{aligned}\qquad(3.5)$$

Ta xét trường hợp bộ (q-2) điểm bất kì trong $a_j (1 \le j \le q)$, khi đó:

$$(q-2)T_0(R, f_1) < \overline{N_0}(R, f_1) + \sum_{j=1}^{q-2} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) - (q-3)N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)}}\right) + (q-2)N_0\left(R, \frac{1}{f_1}\right) + S(R, f_1).$$

Tương tự:

$$(q-2)T_0(R, f_2) < \overline{N_0}(R, f_2) + \sum_{j=1}^{q-2} N_0\left(R, \frac{1}{f_2^{(k)} - a_j}\right) - (q-3)N_0\left(R, \frac{1}{f_2^{(k)}}\right) + (q-2)N_0\left(R, \frac{1}{f_2}\right) + S(R, f_2).$$

Do $E(0, f_1) \subset E(0, f_1^{(n)})$ và $E(0, f_2) \subset E(0, f_2^{(n)})$, ta có:

$$(q-2)T_0(R, f_1) < \overline{N_0}(R, f_1) + \sum_{j=1}^{q-2} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) + N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)}}\right) + S(R, f_1).$$

Và $(q-2)T_0(R, f_2) < \overline{N_0}(R, f_2) + \sum_{j=1}^{q-2} N_0\left(R, \frac{1}{f_2^{(k)} - b_j}\right) + N_0\left(R, \frac{1}{f_2^{(k)}}\right) + S(R, f_2).$ (3.6)

Giả sử mọi $a_j (1 \le j \le q)$ là hữu hạn. Từ (3.6) ta có:

$$\begin{aligned}(q-2)T_0(R, f_1) &< \overline{N_0}(R, f_1) + \sum_{j=1}^{q-2} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) + N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)}}\right) + S(R, f_1) \\ &< T_0(R, f_1) + \sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) + S(R, f_1).\end{aligned}$$

Do đó, $(q-3)T_0(R, f_1) < \sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) + S(R, f_1).$

Tương tự, ta có $(q-3)T_0(R, f_2) < \sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_2^{(k)} - a_j}\right) + S(R, f_2).$

Giả sử $f_1^{(k)}(z) \ne f_2^{(k)}(z)$, do $E(a_j, f_1^{(k)}) \subset E(a_j, f_2^{(k)})$ ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) &\le N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - f_2^{(k)}}\right) \le T_0(R, f_1^{(k)}) + T_0(R, f_2^{(k)}) + O(1) \\ &\le (n+1)T_0(R, f_1) + (n+1)T_0(R, f_2) + O(1).\end{aligned}$$

Do đó, ta có:

$$\sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) \le \left(\frac{k+1}{q-3} + O(1)\right)\left(\sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) + \sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_2^{(k)} - a_j}\right)\right).$$

Từ đó,

$$\left(\frac{q-(k+4)}{q-3} + O(1)\right)\sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right) \le \left(\frac{k+1}{q-3} + O(1)\right)\sum_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \frac{1}{f_2^{(k)} - a_j}\right).$$

Khi $R \to \infty$ ta có:

$$\frac{\lim\limits_{R\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \dfrac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right)}{\lim\limits_{R\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{q-1} N_0\left(R, \dfrac{1}{f_2^{(k)} - a_j}\right)} < \frac{k+1}{q-(k+4)}.$$

Nên khi xét bộ q điểm thay cho (q-1) điểm ta có:

$$\frac{\lim\limits_{R\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{q} N_0\left(R, \dfrac{1}{f_1^{(k)} - a_j}\right)}{\lim\limits_{R\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{q} N_0\left(R, \dfrac{1}{f_2^{(k)} - a_j}\right)} < \frac{k+1}{q-(k+3)}.$$

Mâu thuẫn với giả thiết iii). Vậy $f_1^{(k)} \equiv f_2^{(k)}$ khi các điểm $a_j (1 \le j \le q)$ là hữu hạn.

Ta chứng minh định lý đúng trong trường hợp tồn tại $a_j (1 \le j \le q)$ sao cho $a_j = \infty$.

Lấy giá trị $a \ne a_j (1 \le j \le q)$. Xét các hàm $F^{(k)}(z) = \dfrac{1}{f_1^{(n)}(z) - a}; G^{(k)}(z) = \dfrac{1}{f_2^{(n)}(z) - a}$

và các giá trị $b_j = \dfrac{1}{a_j - a} (1 \le j \le q-1); b_q = 0.$

Khi đó, $F^{(k)}(z)$ và $G^{(k)}(z)$ có cùng ảnh ngược không tính bội của các giá trị $b_j (1 \le j \le q)$. Áp dụng trường hợp trên, ta có $F^{(k)}(z) \equiv G^{(k)}(z)$. Do đó $f_1^{(k)} \equiv f_2^{(k)}$. Vậy định lý được chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã thiết lập được mối quan hệ của hai đạo hàm của hàm phân hình có cùng ảnh ngược của năm điểm trên miền vành khăn. Từ kết quả này, trong trường hợp đạo hàm cấp k = 0 thì định lý được đưa về định lý năm điểm cho hàm phân hình trên miền vành khăn đã biết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. T. B. Cao, H. X. Yi, H. Y. Xu (2009), *On the multiple values and uniqueness of meromorphic functions on annuli*, Compute. Math. Appl.,58, 1457-1465.
2. Y. X. Chen, Z. J. Wu (2012), *Exceptional values of meromorphic functions and of their derivatives on annuli*, Ann. Polon.Math. 105, 154-165.
3. Fernandez (2010), *On the value distribution of meromorphic function in the punctured plane*, Mathematychin Studii, 34, 136-144.
4. Hayman W K. (1964), *Meromorphic functions* ,Oxford: Oxford University Press.
5. Ya. Khrystiyanyn (2005), A. A. Kondratyuk, On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions *on annuli*, Mathematychin Studii, 23,19-30.

6. A. Kondratyuk, I Laine (2006), *Meromorphic functions in multiply connected domains*, Ilpo Laine (ed.), Fourier Series Methods in Complex Analysis, Report Series 10, Department of Mathematics, University of Joensuu pp.9-111.
7. C.Yang, H. X. Yi (1995), *Uniqueness theory of meromorphic functions,* Science Press.
8. Tran Van Tan, Nguyen Van Thin (2016), *On Lappan's Five-Point Theorem*, Computational Methods and Function Theory, 17(1).
9. Nguyen Van Thin, Nguyen Thi Thu Hang (2017), *A modification of the Nevanlinna–Cartan theory for holomorphic curve*, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 62(4).