PHÂN TÍCH MỜ KHUNG THÉP SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TRỰC TIẾP VÀ THUẬT TOÁN TIẾN HÓA VI PHÂN CẢI TIẾN

TS. **TRƯƠNG VIỆT HÙNG**
Trường Đại học Thủy lợi
TS. **HÀ MẠNH HÙNG**
Trường Đại học Xây dựng

Tóm tắt: *Bài báo trình bày một phương pháp hiệu quả cho việc xác định khả năng chịu tải của kết cấu khung thép với các tham số của kết cấu và tải trọng là biến mờ. Phương pháp phân tích trực tiếp, trong đó các phần tử dầm và cột được mô hình bằng phương pháp khớp dẻo hiệu chỉnh, được sử dụng để tính toán khả năng chịu tải của công trình có xét đến các ứng xử phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu. Phương pháp lát cắt-α được sử dụng để mô tả kết quả tính toán mờ của bài toán. Thuật toán tối ưu tiến hóa vi phân cải tiến được áp dụng để xác định các cận dưới và cận trên cho khả năng chịu tải của kết cấu với mỗi lát cắt- α. Khung thép không gian 2 tầng được nghiên cứu để minh họa cho tính hiệu quả của phương pháp được xây dựng.*

Từ khóa: *Biến mờ; Khung thép; Phân tích trực tiếp; Tối ưu; Tiến hóa vi phân.*

Abstract: *This paper introduces an efficient method for estimating the load-carrying capacity of steel frames considering fuzzy variables. A nonlinear inelastic analysis where beams and columns are modeled by using the refined plastic hinge method is used to estimate the load-carrying capacity of the structure considering structural nonlinear inelastic behaviors. The α-cut strategy is employed to illustrate the numerical results. An improved differential evolution is used to determin the lower- and upper-bounds of the structural load-carrying capacity corresponding to each level of the α-cut. A two-story space frame is studied to demonstrate the efficiency of the proposed method.*

Key word: *Fuzzy; Steel frame; Direct design; Optimzation; Differential evolution.*

1. Đặt vấn đề

Kết cấu khung thép được sử dụng phổ biến hiện nay, đặc biệt trong các công trình dân dụng và công nghiệp, do khả năng vượt nhịp lớn, hình thức đẹp, phong phú và có thể làm nhiều hình dạng kết cấu khác nhau. Tuy nhiên, do đặc điểm của vật liệu thép (là loại vật liệu dẻo có khả năng làm việc ngoài miền đàn hồi tốt), tính chất phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu cần được xét đến trong thiết kế công trình. Trong các phương pháp thiết kế thông thường, tính phi tuyến của công trình được xét đến một cách gián tiếp thông qua 2 bước cơ bản là: (1) xác định nội lực sử dụng phân tích tuyến tính đàn hồi và (2) kiểm tra độ an toàn của từng cấu kiện bằng các công thức cho sẵn trong các tiêu chuẩn hiện hành (ví dụ [1-2]) trong đó các yếu tố phi tuyến đã được tích hợp sẵn. Cách tiếp cận này rõ ràng không mô tả cụ thể được ứng xử phi tuyến của kết cấu, cũng như việc xét riêng lẻ từng cấu kiện công trình sẽ không đảm bảo được sự tương tác của các cấu kiện đó trong sự làm việc chung của toàn hệ kết cấu. Để khắc phục những nhược điểm này, các phương pháp phân tích trực tiếp được đề xuất và thu hút sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Trong các phương pháp phân tích trực tiếp, ứng xử của kết cấu được ghi nhận liên tục theo các bước tải trọng nhỏ và do đó ứng xử phi tuyến của công trình theo tải trọng được tính toán trực tiếp. Tính an toàn của công trình lúc này không đánh giá thông qua việc kiểm tra từng cấu kiện riêng lẻ như trong thiết kế thông thường mà thông qua khả năng chịu tải của toàn bộ kết cấu được xác định từ đường quan hệ giữa khả năng chịu tải và tải trọng. Một số nghiên cứu điển hình về thiết kế kết cấu thép sử dụng phân tích trực tiếp là [3-10].

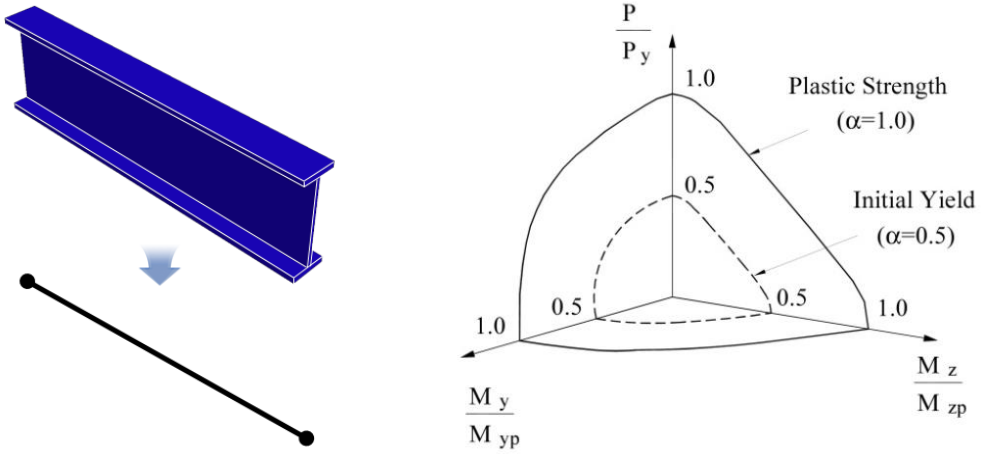
Trong quá trình thiết kế công trình nói chung và kết cấu thép nói riêng, chúng ta đã quá quen thuộc với việc các số liệu về hình học, vật liệu và tải trọng là những giá trị cụ thể được xác định dựa theo quy định khác nhau trong các tiêu chuẩn. Tuy nhiên, trong thực tế các tham số của kết cấu công trình là những tham số không chắc chắn, nghĩa là không phải là những giá trị chính xác. Nguyên nhân của vấn đề này

xuất phát từ nhiều yếu tố khác nhau như tính ngẫu nhiên của tự nhiên (ví dụ tải trọng gió, hoạt tải,...) hoặc sai số trong chế tạo và sản xuất (như các kích thước hình học hay thông số của vật liệu,...). Nếu số liệu của các tham số không chắc chắn đủ lớn, chúng có thể được xác định gần đúng như các biến ngẫu nhiên (random variables) với các dạng phân phối xác suất thường gặp trong toán học như phân phối chuẩn, Gumbel,... Ngược lại, trong trường hợp số liệu không đủ lớn, các tham số này được xem xét trong tính toán như các biến mờ (fuzzy variables). Trong thực tế thiết kế công trình, do số liệu thống kê và thí nghiệm có hạn chế, các thông số cấu tạo của kết cấu như kích thước và đặc trưng vật liệu thường là biến mờ. Đối với các biến mờ, chúng ta chỉ biết được khoảng giá trị thay đổi của chúng dựa trên các số liệu thống kê hạn chế và kinh nghiệm thiết kế của kỹ sư. Để giải quyết bài toán thiết kế công trình đối với các biến mờ, rất nhiều phương pháp tính toán đã được đề xuất ví dụ như: xây dựng phương pháp phần tử hữu hạn cho biến khoảng [11], phương pháp xây dựng hàm xấp xỉ ước lượng phản ứng của kết cấu [12], phương pháp mô phỏng (ví dụ sử dụng thuật toán Monte Carlo) [13], phương pháp sử dụng thuật toán tối ưu [14],... Mỗi phương pháp có ưu nhược điểm khác nhau. Các thuật toán phần tử hữu hạn với biến khoảng cho phép xem xét các biến đầu vào là các khoảng giá trị và đầu ra cũng xác định là một khoảng giá trị từ đó xác định được cận trên và cận dưới của thông số đầu ra. Phương pháp này tính hiệu quả cao tuy nhiên lại đòi hỏi phần mềm tính toán kết cấu phải chuyên biệt cho biến là các thông số khoảng. Các phần mềm phân tích kết cấu thông thường không thực hiện được. Phương pháp xây dựng các hàm xấp xỉ phản ứng của công trình rất hiệu quả do số lượng phân tích kết cấu thấp hơn rất nhiều phương pháp khác. Tuy nhiên, phương pháp này có nhược điểm là sai số lớn đối với các bài toán có tính phi tuyến cao. Phương pháp mô phỏng MCS được xem là phương pháp cho kết quả chính xác nếu số mẫu rất lớn. Tuy nhiên, nó lại đòi hỏi một khối lượng tính toán khá nhiều nên tính thực tế thấp. Phương pháp này thường được dùng để kiểm chứng tính chính xác của các phương pháp khác trong nghiên cứu. Phương pháp sử dụng các thuật toán tối ưu cho phép tiết kiệm đáng kể số lượng tính toán kết cấu công trình so với các phương pháp khác khi số lượng biến mờ là lớn. Tuy nhiên, khi số lượng biến mờ là ít, phương pháp này lại tốn thời gian hơn các phương pháp trên. Bên cạnh đó, theo hiểu biết của tác giả, cho đến nay chưa có nghiên cứu nào về việc ước lượng khả năng chịu tải của kết cấu khung thép với biến mờ sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi được xuất bản.

Trong bài báo này, bài toán ước lượng khả năng chịu tải của kết cấu thép khi các tham số thiết kế là các biến mờ được trình bày. Phương pháp khớp dẻo hiệu chỉnh [14] được sử dụng để xét đến các ứng xử phi tuyến của công trình. Phương pháp lát cắt-α được sử dụng để mô tả kết quả tính toán mờ. Với mỗi lát cắt- α, các cận dưới và cận trên cho khả năng chịu tải của kết cấu được xác định bằng cách sử dụng thuật toán tối ưu tiến hóa vi phân (DE) cải tiến. Khung thép không gian 2 tầng được nghiên cứu để minh họa cho phương pháp được đề xuất.

2. Phương pháp phân tích trực tiếp cho khung thép phi tuyến

Các cấu kiện dầm và cột của khung thép được mô phỏng bằng các phần tử dầm-cột theo phương pháp khớp dẻo hiệu chỉnh [15-21]. Theo phương pháp này, mỗi phần tử dầm hoặc cột được đơn giản hóa như một phần tử thanh đàn hồi có 2 đầu là hai khớp dẻo với chiều dài bằng 0. Phần tử này được giả thiết rằng hiện tượng chảy dẻo chỉ xảy ra tại 2 khớp dẻo hai đầu thanh. Hiệu ứng $P-\delta$ được xét đến bằng các hàm ổn định của Chen và Liew [17]. Mô hình tiếp tuyến CRC [18] được sử dụng để xét đến sự phát triển của các nút dẻo của các phần tử chịu lực dọc trục. Mô hình giảm độ cứng cho khớp dẻo [20] sử dụng mô hình mặt chảy Orbison (hình 1.b) [22] được áp dụng đối với các phần tử chịu cả lực dọc trục và uốn. Chi tiết xây dựng phần tử khớp dẻo hiệu chỉnh cho khung thép có thể tham khảo trong tài liệu [16].



a) Mô hình phần tử b) Mặt chảy dẻo Orbison

Hình 1. *Phương pháp khớp dẻo hiệu chỉnh*

3. Bài toán tính toán kết cấu thép với biến mờ

Khái niệm logic mờ được giáo sư Lotfi Zadeh đưa ra lần đầu tiên vào năm 1965 [23]. Cho đến nay, logic mờ được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau đặc biệt là trong kỹ thuật điều khiển. Để hiểu khái niệm tập mờ và biến mờ, chúng ta cần xuất phát từ khái niệm kinh điển A như sau:

$$A = \{x \in X \mid \text{thỏa mãn nhóm điều kiện nào đó}\} \quad (1)$$

nghĩa là A là tập con của tập X bao gồm các giá trị x thỏa mãn nhóm điều kiện cụ thể. Ta có thể biểu diễn một cách tổng quát tập A là tập hợp các điểm x với điều kiện phụ thuộc $\mu_A(x)$ trong đó $\mu_A(x)$ nhận 1 trong 2 giá trị 0 hoặc 1. Nếu x thuộc A thì $\mu_A(x)=1$ và ngược lại. Ta gọi rằng $\mu_A(x)$ là hàm liên thuộc biểu diễn cho mức độ x thuộc tập A hay không. Trong trường hợp tổng quát hóa hàm liên thuộc $\mu_A(x)$ ta có khái niệm tập mờ A như sau:

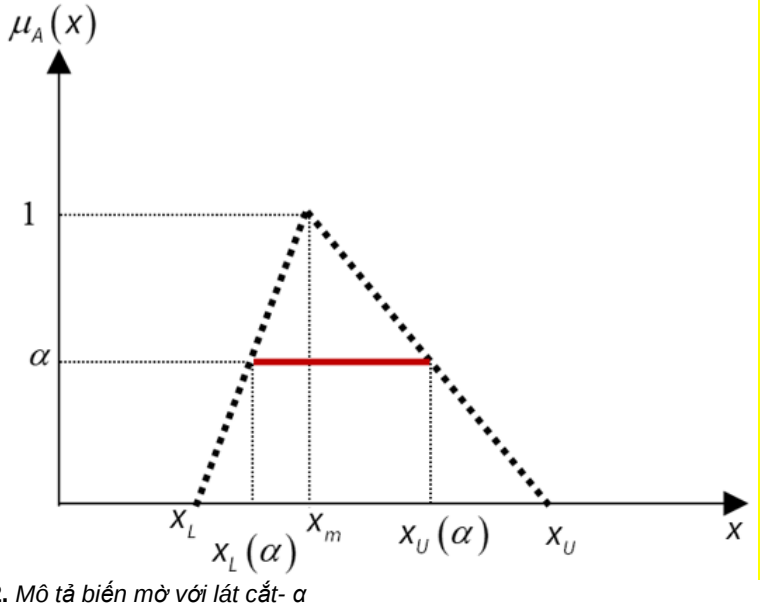
$$A=\{x,\mu_A(x)\},\quad x\in X \quad (2)$$

Đối với mỗi giá trị x cụ thể, giá trị $\mu_A(x)\in[0;1]$ được xem như khả năng x thuộc tập mờ A. Nếu $\mu_A(x)=0$ có nghĩa x không thuộc A, nếu $\mu_A(x)=1$ nghĩa là x chắc chắn thuộc A. $\mu_A(x)$ có thể là giá trị rời rạc như ví dụ ở trên về tập kinh điển, hoặc có thể là đường "trơn" cong, gọi là hàm liên thuộc kiểu S, như hàm mật độ xác suất của các phân phối xác suất. Trong trường hợp này biểu diễn của hàm $\mu_A(x)$ thường rất phức tạp. Do vậy, các hàm liên thuộc thường được đơn giản hóa bằng cách biểu diễn dưới dạng tuyến tính gồm nhiều đoạn thẳng và được gọi là hàm liên thuộc có mức chuyển đổi tuyến tính. Những tập mờ thường gặp có hàm liên thuộc có biểu đồ dạng hình thang hoặc tam giác. Đối với bài toán mờ của thiết kế công trình, các tham số về tải trọng, đặc trưng hình học của công trình và đặc trưng của vật liệu là các biến mờ với hàm liên thuộc có thể có dạng bất kỳ. Do sự đa dạng của các hàm liên thuộc, phương pháp lát cắt- α thường được sử dụng để giải bài toán mờ thiết kế công trình. Bằng cách áp dụng phương pháp này, mỗi biến mờ có hàm thuộc phức tạp được chuyển đổi thành biến khoảng nhận giá trị tùy ý trong một khoảng xác định. Từ đó, thông số mờ đầu ra của bài toán mờ cũng là một biến khoảng và được xác định thông qua 2 giá trị cực đại và cực tiểu của khoảng. Chi tiết phương pháp lát cắt- α được trình bày dưới đây trong đó các biến mờ của bài toán được giả thiết có dạng biến mờ tam giác như trên hình 2. Tuy nhiên, phương pháp này hoàn toàn áp dụng cho các trường hợp biến mờ có hàm liên thuộc dạng bất kỳ. Đối với giá trị α trong khoảng [0;1], ta có khái niệm tập lát cắt-α, ký hiệu là A_α bao gồm các giá trị x có $\mu_A(x)\geq\alpha$. Mỗi biến mờ được biểu diễn dưới dạng:

$$y=[x_L,x_m,x_U] \quad (3)$$

trong đó: x_m là giá trị của x tương ứng với $\alpha=1$.

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & khi \quad x\le x_L\\ \dfrac{x-x_L}{x_m-x_L} & khi \quad x_L\le x\le x_m\\ \dfrac{x_U-x}{x_U-x_L} & khi \quad x_m\le x\le x_m\end{cases}$$



Hình 2. *Mô tả biến mờ với lát cắt- α*

Lúc này bài toán xác định khả năng chịu tải của kết cấu thép theo biến mờ được thể hiện dưới dạng:

$$If=\frac{R}{S}=F(x_1,...,x_n) \qquad (3)$$

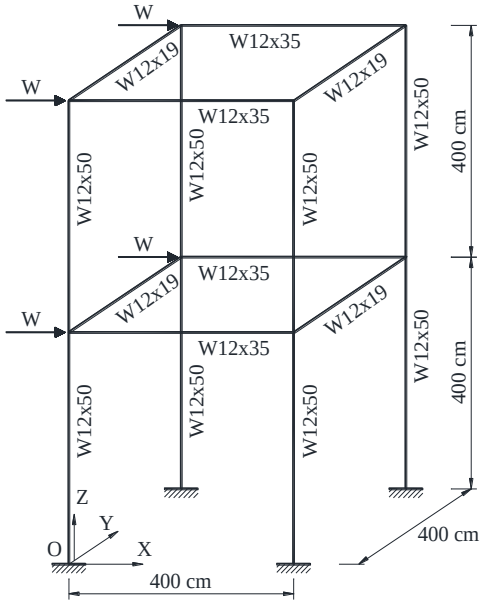
trong đó: R và S tương ứng là khả năng chịu tải của công trình và tác động của tải trọng; $If=\frac{R}{S}$ gọi là hệ số chịu tải của công trình; $(x_1,...,x_n)$ là n biến mờ của kết cấu. Nếu $If\ge 1$ nghĩa là khả năng chịu tải của công trình lớn hơn tác động của tải trọng, nên công trình an toàn, và ngược lại. If được xác định dựa trên phân tích trực tiếp trình bày trong phần 2 thông qua phần mềm PAAP [16].

Từ phương trình (3) ta thấy rằng các thông số đầu vào là biến mờ nên If cũng sẽ là một dạng biến mờ. Do vậy, đối với mỗi lát cắt- α, chúng ta cần xác định cận trên và cận dưới của $If(\alpha)$ ký hiệu tương ứng là $If_U(\alpha)$ và $If_L(\alpha)$. Việc tìm kiếm giá trị $If_L(\alpha)$ và $If_U(\alpha)$ hoàn toàn có thể mô tả dưới dạng bài toán tối ưu tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của If với các biến thiết kế là $(x_1,...,x_n)$. Cụ thể, chúng ta có thể mô tả việc tìm $If_L(\alpha)$ như sau ($If_U(\alpha)$ có thể thiết lập tương tự):

$$\text{Minimize } If=\frac{R(x_1,...,x_n)}{S(x_1,...,x_n)} \quad x_i\in[x_{i,L},x_{i,U}];\ i=1,..,n \qquad (4)$$

Bài toán tối ưu trình bày trong công thức (4) là bài toán tối ưu cơ bản có biến là biến liên tục và không có điều kiện ràng buộc. Để giải bài toán tối ưu này có khá nhiều phương pháp khác nhau như phương pháp tối ưu trực tiếp hoặc sử dụng các thuật toán meta-horitic. Tuy nhiên, do ứng xử của kết cấu khung thép có độ phi tuyến cao. Do vậy, các thuật toán meta-horitic thường được ưu tiên áp dụng nhờ khả năng cân bằng giữa việc tìm kiếm các nghiệm tối ưu địa phương và toàn cục tốt hơn các phương pháp tối ưu trực tiếp. Trong nghiên cứu này, thuật toán tối ưu cải tiến (EpDE) do các tác giả đề xuất trong tài liệu [4] được sử dụng. Nội dung chính của thuật toán EpDE độc giả có thể tìm đọc trong tài liệu [4].

4. Trường hợp nghiên cứu



Hình 3. *Khung không gian 2 tầng*

Trong phần này, khung thép không gian 2 tầng có kích thước như trên hình 3 được nghiên cứu. Các cột của khung cùng sử dụng một loại tiết diện là W12x50, trong khi đó các dầm được chia làm 2 nhóm sử dụng tiết diện W12x35 và W12x19 như trên hình 3. Đối với mỗi tiết diện sẽ có 2 thông số được xét như biến mờ là diện tích (A) và mô men quán tính (I) theo trục địa phương chính. Các tải trọng gồm tải trọng gió (W) tác dụng theo phương x và được quy thành các tải tập trung đặt tại nút khung. Tĩnh tải (DL) và hoạt tải (LL) được xem là các tải phân bố trên các dầm. Thép sử dụng là thép A992. Tổng cộng trong trường hợp này có 11 biến mờ với các thông tin được trình bày trong bảng 1. Các biến mờ được giả thiết dưới dạng biến mờ tam giác. Tổ hợp tải trọng được xem xét là (1.2DL+0.5LL+1.6W). Các thông số sử dụng cho thuật toán tối ưu EpDE như sau: số lượng cá thể = 20, số vòng tiến hóa lớn nhất = 400; A = 1,0; B = 1,0; hệ số khuếch đại F = 0,7; hệ số lai ghép CR lấy ngẫu nhiên trong đoạn (0;1). Điều kiện hội tụ là khi số vòng tiến hóa đạt đến giá trị lớn nhất (400) hoặc độ lệch giữa hàm mục tiêu tốt nhất và kém nhất trong quần thể nhỏ hơn 0.01%. Do thuật toán tối ưu phải được thiết lập dưới dạng tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu nên trong 2 bài toán tìm cận trên và cận dưới hàm mục tiêu được chọn như sau: (1) Hàm tối ưu với bài toán tìm cận dưới được lấy bằng giá trị hệ số khả năng chịu tải trọng của kết cấu lf , (2) còn trong trường hợp tìm cận trên thì hàm tối ưu được biểu diễn dưới dạng (10- lf). Để kiểm chứng độ chính xác của phương pháp được đề xuất, phương pháp tìm cận trên và dưới dùng thuật toán MCS với 50000 mẫu được sử dụng (MCS50000).

Bảng 1. *Thông tin biến mờ của khung không gian 2 tầng*

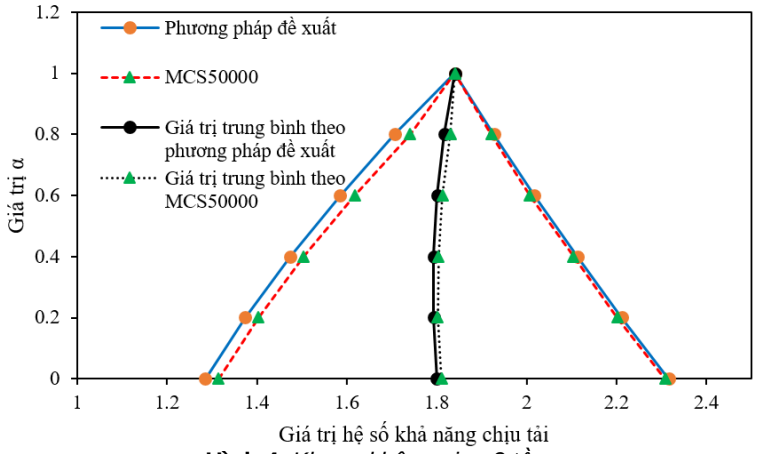
Biến mờ	Ký hiệu	x_L	x_m	x_U	Ghi chú
Ứng suất chảy	Fy (Mpa)	310,5	345,0	379,5	dạng tam giác cân, lệch 10%
Mô đun đàn hồi	E (Gpa)	180	200	220	dạng tam giác cân, lệch 10%
Cột W12x50	A (mm^2)	9090	10100	11110	dạng tam giác cân, lệch 10%
	I (mm^4)	159300000	177000000	194700000	dạng tam giác cân, lệch 10%
Dầm 1 W12x35)	A (mm^2)	5976	6640	7304	dạng tam giác cân, lệch 10%
	I (mm^4)	190800000	212000000	233200000	dạng tam giác cân, lệch 10%
Dầm 2 W12x19	A (mm^2)	3771	4190	4609	dạng tam giác cân, lệch 10%
	I (mm^4)	74520000	82800000	91080000	dạng tam giác cân, lệch 10%
Tĩnh tải	DL (kN/m)	18	20	22	dạng tam giác cân, lệch 10%

Hoạt tải	LL(kN/m)	13,5	14,25	16,5	dạng tam giác không cân, lệch 10%
Gió	W (kN)	40	45	60	dạng tam giác không cân, lệch 20%

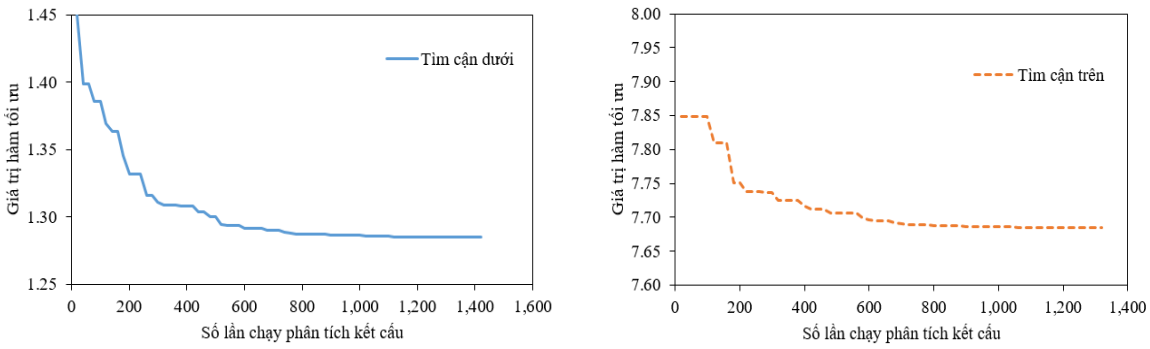
Bảng 2. *Kết quả tính toán If của khung không gian 2 tầng*

	EDE			MCS50000		
anpha	x_L	x_m	x_U	x_L	x_m	x_U
0	1,2854	1,8005	2,3156	1,3146	1,8112	2,3078
0,2	1,374	1,79275	2,2115	1,4029	1,8022	2,2015
0,4	1,4742	1,7934	2,1126	1,5037	1,8040	2,1044
0,6	1,5852	1,80125	2,0173	1,6177	1,8127	2,0076
0,8	1,7061	1,81655	1,927	1,7404	1,8308	1,9212
1,0	1,8401	1,8401	1,8401	1,8401	1,8401	1,8401

Bảng 2 và hình 4 trình bày kết quả xác định giá trị cận trên và cận dưới cho *If* sử dụng phương pháp đề xuất và MCS10000 đối với các lát cắt- α khác nhau. Kết quả cho thấy rằng phương pháp đề xuất tìm kiếm được giá trị cận trên và cận dưới tốt hơn so với MCS10000. Cụ thể, đối với cận dưới của *If* , giá trị tìm được sử dụng phương pháp đề xuất nhỏ hơn khoảng 2.2% so với sử dụng phương pháp MCS với 10000 mẫu. Đối với cận trên, giá trị tìm được sử dụng phương pháp đề xuất lớn hơn khoảng 0.35% so với sử dụng MCS50000. Bên cạnh đó, chương trình tối ưu chỉ sử dụng trung bình 1500 lần phân tích kết cấu so với 50000 lần của phương pháp MCS50000. Điều này cho thấy kết quả của phương pháp đề xuất không những cho kết quả tốt hơn mà tiết kiệm thời gian hơn rất nhiều so với MCS. Đường hội tụ của quá trình tối ưu tìm cận trên và cận dưới của *If* được minh họa trong hình 5.



Hình 4. *Khung không gian 2 tầng*



a) Tìm cận dưới b) Tìm cận trên

Hình 5. *Đường hội tụ hàm mục tiêu của bài toán tối ưu*

5. Kết luận

Bài báo trình bày bài toán ước lượng khả năng chịu tải của kết cấu thép khi các tham số thiết kế là các biến mờ. Khả năng chịu tải của khung được tính toán dựa theo phương pháp khớp dẻo hiệu chỉnh [15] cho phép xét đến các ứng xử phi tuyến của công trình. Phương pháp lát cắt-α được sử dụng để mô tả kết quả tính toán mờ. Với mỗi lát cắt- α, các cận dưới và cận trên cho khả năng chịu tải của kết cấu được xác định bằng cách sử dụng thuật toán tối ưu tiến hóa vi phân (DE) cải tiến. Khung thép không gian 2 tầng với 11 biến mờ dạng tam giác được tính toán. Kết quả tính toán cho thấy phương pháp đề xuất so với phương pháp Monte Carlo với 50000 mẫu không chỉ cho kết quả tìm cận của hệ số khả năng chịu tải công trình tốt hơn mà còn sử dụng ít hơn rất nhiều số lần phân tích kết cấu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. AISC-LRFD (1999). Manual of steel construction – load and resistance factor design. *Chicago (IL): American Institute of Steel Construction.*
2. EN 1993-1-1, Eurocode 3. Design of steel structures – part 1-1: general rules and rules for building. *Brussels: European Committee for Standardization; 2005.*
3. V. H. Truong, S.E. Kim (2017). An efficient method for reliability-based design optimization of nonlinear inelastic steel space frames. *Struct Multidisc Optim; 56: 331-351.*
4. V.H. Truong, S.E. Kim (2018). Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm. *Advances in Engineering Software; 121: 59-74.*
5. M.H. Ha, Q.A. Vu, V.H. Truong (2018). Optimum Design of Stay Cables of Steel Cable-stayed Bridges Using Nonlinear Inelastic Analysis and Genetic Algorithm. *Structures; 16: 288-302.*
6. V.H. Truong, Q.V. Vu, V.T. Dinh (2019). A deep learning-based procedure for estimation of ultimate load carrying of steel trusses using advanced analysis. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE; 13(3): 113-123.*
7. V.H. Truong, S.E. Kim (2018). A robust method for optimization of semi-rigid steel frames subject to seismic loading. *Journal of Constructional Steel Research; 145C: 184-195.*
8. Q.V. Vu và cs. (2019). Bend-buckling strength of steel plates with multiple longitudinal stiffeners. *Journal of Constructional Steel Research 2019; 158: 41-52.*
9. S.E. Kim, V.H. Truong (2020). Reliability Evaluation of Semirigid Steel Frames Using Advanced Analysis. *Journal of Structural Engineering; 146(5): 04020064.*
10. M.H. Ha, Q.V. Vu, V.H. Truong (2020). Optimization of nonlinear inelastic steel frames considering panel zones. *Advances in Engineering Software; 142: 102771.*
11. R.L. Muhanna, H. Zhang, R.L (2007). Mullen. Combined axial and bending stiffness in interval finite-element methods. *Journal of Structural Engineering, ASCE; 133(12): 1700–9.*
12. U.O. Akpan, T.S. Koko, I.R. Orisamolu, B.K (2001). Gallant. Practical fuzzy finite element analysis of structures. *Finite elements in analysis and design; 38: 93-111.*
13. E. Jahani, R.L. Muhanna (2014). Reliability assessment with fuzzy random variables using interval Monte Carlo Simulation. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering; 29: 208–220.*
14. P.H. Anh, N.X. Thành, N.V. Hùng, N.T. Luân (2014). Xây dựng thuật toán và công cụ dùng trong phân tích mờ kết cấu công trình. *Đề tài khoa học và công nghệ cấp trường, Đại học Xây dựng, Hà Nội; 2014.*
15. J.Y.R. Liew, W.F. Chen (2000). Advanced inelastic analysis of frame structures. *Journal of Constructional Steel Research 2000; 55:245-265.*
16. H.T. Thai, S.E. Kim (2011). Practical advanced analysis software for nonlinear inelastic dynamic analysis of space steel structures. *J. Constr. Steel Res; 67(3): 453-461.*
17. W.F. Chen, E.M. Lui (1987). Structural stability: theory and implementation. *Elsevier Amsterdam.*
18. W.F. Chen, E.M. Lui (1992). Stability design of steel frames. *Boca Raton, FL: CRC Press.*
19. S.E. Kim, S.H. Choi (2001). Practical advanced analysis for semi-rigid space frames. *International journal of solids and structures; 38: 9111-131.*
20. W.F. Chen, S.E. Kim, S.H. Choi (2001). Practical second-order inelastic analysis for three-dimensional steel frames. *Steel Structures; 1(3): 213-223.*
21. S.E. Kim, C.M. Uang, S.H. Choi, K.Y. An (2006). Practical advanced analysis of steel frames considering lateral-torsional buckling. *Thin-Walled Structures; 44(7): 709-720.*
22. J.G. Orbison, W. McGuire, J.F. Abel (1982). Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng; 33(1): 557–573.*
23. L.A. Zadeh. Fuzzy sets (1965). Information and control; 8(3): 338-353.

Ngày nhận bài: *15/3/2020.*

Ngày nhận bài sửa lần cuối: *26/3/2020.*