

## TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA DÀM CÓ KẼ ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN TRUYỀN

ThS. NGUYỄN THỊ NGỌC LOAN

Đại học Kiến trúc Hà Nội

*Tóm tắt: Bài báo giới thiệu thuật toán xác định chuyển vị của dầm có xét đến biến dạng trượt bằng phương pháp ma trận truyền. Với việc kể đến biến dạng trượt, phương trình vi phân của dầm được giải và viết dưới dạng ma trận. Một số ví dụ phân tích dầm với các điều kiện biên khác nhau cho thấy lời giải của phương pháp rất phù hợp với lời giải giải tích. Ảnh hưởng của tỉ số  $h/L$ , hệ số hiệu chỉnh cắt  $\kappa_y$ , tỉ số Poisson  $\mu$  đến giá trị của thành phần chuyển vị do biến dạng trượt cũng được trình bày.*

*Từ khóa: ma trận truyền; dầm có xét biến dạng trượt; chuyển vị, dầm cao; tiết diện thành mỏng*

*Abstract: This paper presents the transfer matrix algorithm to compute the deformation of shear-flexible beams. With taking shear deformation into account, the differential equation for shear-flexible beam, is solved and written in matrix form. Some analytical examples for beams with the different boundary conditions show that the numerical results are very closed to the analytical results. Effect of depth to span ratio  $h/L$ , shear coefficient/shear correction factor  $\kappa_y$ , Poisson ratio  $\mu$  on shear deformation are also investigated.*

*Keywords: transfer matrix; shear-flexible beam; deflection, deep beam; thin-walled section*

### 1. Giới thiệu

Dầm chuyển, con sơn ngắn và các dầm thành mỏng là các kết cấu ngày nay được sử dụng nhiều trong thực tế. Với các kết cấu này, giả thiết tiết diện ngang trước và sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh không còn phù hợp. Sự phân bố ứng suất trong tiết diện ngang của các dầm này không giống với sự phân bố ứng suất trong tiết diện ngang của các dầm bình thường.

Lý thuyết dầm có xét đến biến dạng trượt, hay còn được gọi là dầm Timoshenko, đã được trình bày trong [1, 2]. Việc áp dụng lý thuyết để tính chuyển vị của dầm có kể đến biến dạng trượt bằng giải tích đã được trình bày trong [3]. Trong [3], bài toán dầm có xét biến dạng trượt đã được xây dựng theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, và được giải bằng phương pháp Lagrange để tìm cực trị của hàm thế năng biến dạng, với các ẩn là chuyển vị  $y$  và lực cắt  $Q_y(x)$ . Trong bài báo này, tác giả chỉ sử dụng các phương trình của cơ học kết cấu để xây dựng ma trận truyền một cách đơn giản và có hệ thống.

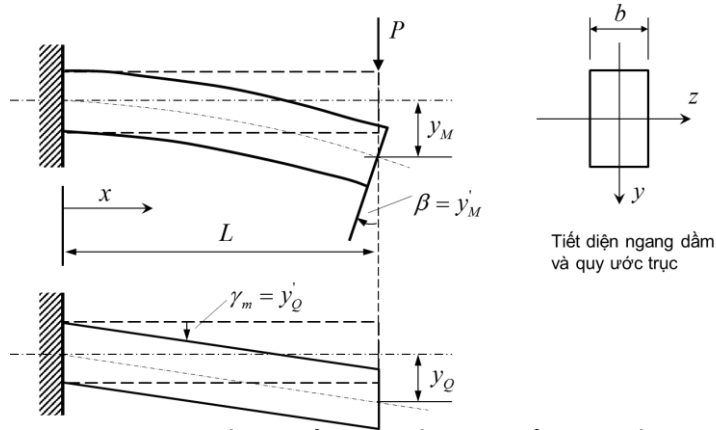
Ma trận độ cứng của phần tử dầm Timoshenko, bốn bậc tự do, cho phương pháp phần tử hữu hạn cũng đã được xây dựng dựa vào nguyên lý thế năng cực tiểu, và được trình bày trong [3-6].

Cùng họ với phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), phương pháp ma trận truyền là một trong các phương pháp số, hiệu quả trong việc phân tích dầm, được trình bày trong [7-9]. Tuy nhiên, trong các tài liệu này, phương pháp ma trận truyền chỉ được viết cho dầm không kể đến biến dạng trượt.

Bài báo này sử dụng phương pháp ma trận truyền để phân tích dầm có xét đến biến dạng trượt. Lý thuyết cơ bản về chuyển vị do biến dạng trượt của dầm được trình bày trong mục 2. Thuật toán ma trận truyền cho dầm có và không xét đến biến dạng trượt lần lượt được trình bày trong mục 3.2 và 3.3. Năm ví dụ tính toán dầm với các điều kiện biên khác nhau, được trình bày ở mục 4 nhằm khẳng định tính đúng đắn của thuật toán. Các kết quả phân tích rất phù hợp với kết quả giải tích.

### 2. Chuyển vị của dầm có xét đến biến dạng trượt

Chuyển vị của dầm gồm chuyển vị uốn do mô men,  $y_M$ , và chuyển vị trượt do lực cắt,  $y_Q$  (hình 1).



Hình 1. Các thành phần chuyển vị do uốn và chuyển vị do cắt của dầm

Quan hệ giữa lực cắt, góc trượt, và chuyển vị do biến dạng trượt được xây dựng như sau:

Thế năng biến dạng trượt của dầm trên phân tố chiều dài  $dx$  do ứng suất tiếp  $\tau$  là:

$$\frac{d\Pi_1}{dx} = \frac{1}{2} \int_A \tau \gamma dA \quad (1)$$

Với góc trượt  $\gamma = \tau/G$  và  $dA = bdy$  thì (1) được viết là:

$$\frac{d\Pi_1}{dx} = \frac{1}{2G} \int \tau^2 b dy \quad (2)$$

Thế năng biến dạng trượt của dầm trên do lực cắt Q là:

$$\frac{d\Pi_2}{dx} = \frac{1}{2} Q_y \gamma_m \quad (3)$$

Cân bằng (2) và (3), với ứng suất tiếp  $\tau = Q_y S_z / I_z b$  [2], ta có:

$$\gamma_m = \frac{Q_y}{GI_z^2} \int \frac{S_z^2}{b} dy \quad (4)$$

trong đó,  $Q_y$  - lực cắt,  $S_z$ ,  $I_z$ ,  $b$  lần lượt là mô men tĩnh, mô men quán tính, và bề rộng của tiết diện.  $G$  - mô đun đàn hồi trượt. Đặt:

$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2} \int \frac{S_z^2}{b} dy, \text{ cho tiết diện đặc} \quad (5a)$$

$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2} \int_s \frac{S_z^2}{t} ds, \text{ cho tiết diện thành mỏng (5b).}$$

trong đó:  $s$  - chu vi của tiết diện và  $t$  - chiều dày của thành.

Thì phương trình (4) được viết lại như sau:

$$\gamma_m = \kappa_y \frac{Q_y}{GA} \quad (6)$$

$\kappa_y$  được gọi là hệ số hiệu chỉnh cắt.

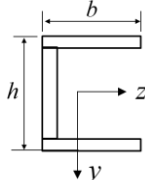
Tỉ số  $A/\kappa_y = A_{Q_y}$  được gọi là diện tích chịu cắt, và  $\gamma_m = Q_y / GA_{Q_y}$ .

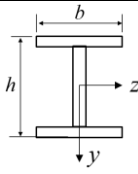
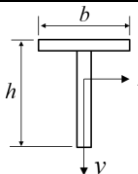
Với các tiết diện thanh thành mỏng, hệ số hiệu chỉnh cắt có thể được tính xấp xỉ, bằng cách bỏ qua khả năng chịu cắt của các cánh, nghĩa là coi tổng diện tích các sườn là diện tích chịu cắt, do đó phương trình (5b) có thể được tính như sau:

$$\kappa_y \cong \frac{A}{\sum A_{web}} \quad (7)$$

Áp dụng phương trình (5) để tính hệ số hiệu chỉnh cắt cho một số tiết diện ngang thông dụng, kết quả được cho trong bảng 1, phù hợp với hệ số hiệu chỉnh cắt cho rất nhiều loại tiết diện khác nhau được trình bày chi tiết trong [10, 11].

Bảng 1. Hệ số hiệu chỉnh cắt cho một số tiết diện ngang thông dụng

Tiết diện	Hệ số hiệu chỉnh cắt, với $\eta = h/b$
Tròn đặc	$\kappa_y = \kappa_z = 1,11$
Chữ nhật đặc	$\kappa_y = \kappa_z = 1,2$
	$\kappa_y = \frac{\eta + 2}{(6\eta + \eta^2)^2} \left[ 24 + 36\eta + 12\eta^2 + \frac{6}{5}\eta^3 \right]$ $\kappa_z = \frac{3(\eta + 2)^3}{(2 + 5\eta + 2\eta^2)^2} \left[ \frac{1}{5} + \frac{7}{10}\eta + \frac{4}{5}\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^3 \right]$

	$\kappa_y = \frac{\eta + 2}{(6\eta + \eta^2)^2} \left[ 6 + 36\eta + 12\eta^2 + \frac{6}{5}\eta^3 \right]$ $\kappa_z = \frac{3}{5}(\eta + 2)$
	$\kappa_y = \frac{12(\eta + 1)^3}{\eta^2(4 + 5\eta + \eta^2)^2} \left[ \frac{1}{4} + \frac{8}{5}\eta + \frac{7}{10}\eta^2 + \frac{1}{10}\eta^3 \right]$ $\kappa_z = \frac{6}{5}(\eta + 1)$

Chuyển vị của dầm có xét đến biến dạng trượt là, (hình 1):

$$y = y_M + y_Q \quad (8)$$

trong đó:  $y_M, y_Q$  lần lượt là chuyển vị do mô men uốn  $M_z$  và chuyển vị do lực cắt  $Q_y$  gây ra.

Quan hệ mô men – chuyển vị và quan hệ lực cắt – chuyển vị được biểu diễn như sau

$$y_M'' = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (a)$$

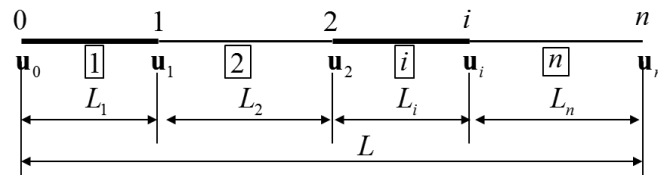
$$y_Q' = \gamma_m = \kappa_y \frac{Q_y}{GA} \quad (b)$$

Việc thành lập và giải phương trình vi phân của dầm, có và không xét đến biến dạng trượt, theo phương pháp ma trận truyền được trình bày trong phần 3 sau đây.

### 3. Xây dựng ma trận truyền

#### 3.1 Phương pháp ma trận truyền

Phương pháp ma trận truyền là một trong các phương pháp số, phù hợp với bài toán phân tích dầm. Dầm được rời rạc hóa thành nhiều phần tử, mà mỗi phần tử được đặc trưng bởi tiết diện, tải trọng, vật liệu của nó. Ví dụ dầm trong hình 2 được chia thành  $n$  phần tử:



Hình 2. Hình để minh họa phương pháp ma trận truyền

Phương pháp ma trận truyền cho dầm trên có thể được phát biểu như sau:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{u}_0 \quad (a)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{u}_{i-1} = \mathbf{k}_{i-1} \mathbf{k}_{i-2} \dots \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{u}_0 \quad (b)$$

$$\mathbf{u}_{x=L} = \mathbf{u}_n = \mathbf{k}_n \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{k}_n \mathbf{k}_{n-1} \dots \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{u}_0 = \mathbf{k} \mathbf{u}_0 \quad (c)$$

trong đó,  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_n$  lần lượt là véc tơ trạng thái, hay nội lực và chuyển vị, tại nút đầu, nút thứ  $i$ , và nút cuối,  $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}$  lần lượt là ma trận truyền của phần tử thứ  $i$  và ma trận truyền tổng thể.

Phương trình (10) cho thấy: Trạng thái tại đầu trái được liên hệ với trạng thái tại đầu phải của một phần tử thông qua ma trận truyền. Véc tơ trạng thái tại nút bất kì có thể được biểu diễn thông qua véc tơ trạng thái của nút đầu tiên. Với phương pháp ma trận truyền, kích thước của hệ phương trình không phụ thuộc vào độ phức tạp của bài toán, ma trận truyền tổng thể bằng tích các ma trận truyền con, và giữ nguyên kích thước của ma trận truyền phần tử.

Lời giải của phương pháp ma trận truyền liên quan đến hai lần “quét” dọc dầm. Lần quét thứ nhất trên toàn bộ chiều dài dầm, giải hệ 10(c), có được véc tơ trạng thái tại các nút 0 và nút  $n$ , lần quét thứ hai là quét từ trái sang phải, giải hệ 10(b) để tìm véc tơ trạng thái tại nút  $i$  bất kì.

Véc tơ trạng thái và ma trận truyền cho dầm có và không xét đến biến dạng trượt lần lượt được xây dựng trong các mục 3.1 và 3.2 sau đây:

#### 3.1 Ma trận truyền cho dầm không xét đến biến dạng trượt

Quan hệ mô men – độ võng và quan hệ mô men – tải trọng của dầm được biểu diễn như sau:

$$y'' EI_z = -M_z \quad (a) \quad (11)$$

$$M_z'' = -q(x) \quad (b)$$

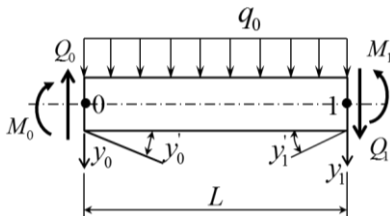
Quan hệ độ võng - tải trọng của dầm là:

$$y'''' EI_z = q(x) \quad (12)$$

trong đó,  $q(x)$  là tải trọng phân bố trên dầm. Trường hợp tải trọng phân bố đều thì  $q(x) = q_0$ . Giải phương trình vi phân (12) có:

$$\begin{aligned} y'''' EI_z &= q_0 x + C_1 &= -Q_y \\ y'' EI_z &= \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 &= -M_z \\ y' EI_z &= \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\ y EI_z &= \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \end{aligned} \quad (13)$$

Các hằng số tích phân  $C_1$  đến  $C_4$  được xác định từ các điều kiện biên, là các nội lực, chuyển vị tại hai đầu của phần tử,  $y, y', M, Q$  (hình 3).



Hình 3. Các biến trạng thái tại hai đầu đoạn dầm

trong đó:  $\mathbf{u}_1 = \{y_1 \quad y'_1 \quad M_{z1} \quad Q_{y1} \quad 1\}^T$ ,  $\mathbf{u}_0 = \{y_0 \quad y'_0 \quad M_{z0} \quad Q_{y0} \quad 1\}^T$ , và  $\mathbf{k}_{01}$  là ma trận truyền đoạn 0-1.

$$\mathbf{k}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & L_{01} & \frac{-L_{01}^2}{2EI} & \frac{-L_{01}^3}{6EI} & \frac{q_0 L_{01}^4}{24EI} \\ 0 & 1 & \frac{-L_{01}}{EI} & \frac{-L_{01}^2}{2EI} & \frac{q_0 L_{01}^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 1 & L_{01} & \frac{-q_0 L_{01}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q_0 L_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

**3.2 Ma trận truyền cho dầm có xét đến biến dạng trượt**

Khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt, quan hệ trong phương trình (11b) giữa mô men và tải trọng vẫn đúng.

Từ các phương trình (8) và (9), phương trình vi phân độ võng của dầm được viết là:

$$y''' = y'''_M + y'''_Q = \frac{q(x)}{EI_z} + \frac{Q_y''}{A_{Q_y} G} \quad (17)$$

Với  $Q_y' = -q(x)$  hay  $Q_y'' = -q'(x)$  thì phương trình (17) được viết lại như sau:

Giả thiết các biến trạng thái tại nút 0 đã biết, ta có:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= y_0; \quad Q_y(x=0) = Q_{y0} = -y_0'' EI_z \\ y'(x=0) &= y'_0; \quad M_z(x=0) = M_{z0} = -y_0' EI_z \end{aligned}$$

Với các quan hệ trên, thay  $x=0$  vào phương trình (13), ta được giá trị của các hằng số tích phân là:

$$\begin{aligned} C_1 &= -Q_{y0} & C_2 &= -M_{z0} \\ C_3 &= y'_0 EI_z & C_4 &= y_0 EI_z \end{aligned}$$

Thay  $x=L$  và các hằng số tích phân vào phương trình (13), ta được trạng thái tại nút 1 là:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + y'_0 L - \frac{1}{2} \frac{M_{z0} L^2}{EI_z} - \frac{1}{6} \frac{Q_{y0} L^3}{EI_z} + \frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI_z} \\ y'_1 &= y'_0 - \frac{M_{z0} L}{EI_z} - \frac{1}{2} \frac{Q_{y0} L^2}{EI_z} + \frac{1}{6} \frac{q_0 L^3}{EI_z} \\ M_{z1} &= M_{z0} + Q_{y0} L - \frac{1}{2} q_0 L^2 \\ Q_{y1} &= Q_{y0} - q_0 L \\ 1 &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Dạng ma trận của hệ phương trình (14) là:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{k}_{01} \mathbf{u}_0 \quad (15)$$

$$y''' = \frac{q(x)}{EI_z} - \frac{q'(x)}{A_{Q_y} G} \quad (18)$$

Từ phương trình (18) có thể thấy, với dầm chịu tải phân bố đều hoặc tải phân bố bậc nhất thì phương trình vi phân cho dầm có và không xét biến dạng trượt là giống nhau, vì  $q''(x) = 0$ .

Để có được ma trận truyền có xét đến biến dạng trượt, giải các phương trình cho  $y'''_M, y'''_M, y'_M, y_M$  chỉ do mô men uốn. Thành phần chuyển vị do biến dạng trượt là:

$$y'_Q = \frac{Q_y}{GA_{Q_y}} = \frac{M'_z}{GA_{Q_y}} \quad (a) \qquad y' = y'_M + \frac{Q_y}{GA_{Q_y}} \quad (20)$$

$$y_Q = \frac{M_z}{GA_{Q_y}} \quad (b) \qquad (19)$$

Góc xoay của tiết diện kể cả biến dạng trượt được xác định như sau:

Trường hợp tải trọng phân bố đều thì  $q(x) = q_0$ .  
Giải phương trình vi phân (18) cho riêng thành phần chuyển vị do mô men uốn:

$$\begin{aligned} y''_M EI_z &= q_0 x + C_1 & &= -Q_y & (a) \\ y''_M EI_z &= \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 & &= -M_z & (b) \\ y'_M EI_z &= \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 & & & (c) \\ y_M EI_z &= \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 & & & (d) \end{aligned} \qquad (21)$$

Thay phương trình (21b) vào phương trình (19b) ta có:

$$y_Q = \frac{-1}{GA_{Q_y}} \left( \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \right) \quad (22)$$

Cộng tác dụng phương trình (21d) và phương trình (22) ta có:

$$y = \frac{q_0}{EI_z} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{EI_z x^2}{2GA_{Q_y}} \right) + \frac{C_1 x^3}{6EI_z} + \frac{C_2 x^2}{2EI_z} + \left( \frac{C_3}{EI_z} - \frac{C_1}{GA_{Q_y}} \right) x + \frac{C_4}{EI_z} \quad (23)$$

trong đó:  $\frac{C_4}{EI_z} = \left( \frac{C_4}{EI_z} - \frac{C_2}{GA_{Q_y}} \right) \quad (24)$

$$\begin{aligned} C_1 &= -Q_{y0} & C_2 &= -M_{z0} \\ C_3 &= y_{M0} EI_z & C_4 &= y_0 EI_z \end{aligned}$$

Góc xoay của tiết diện ngang khi kể đến biến dạng trượt được viết lại như sau:

$$\beta = y'_M = y' - y'_Q = y' - \gamma_m \quad (25)$$

Giả thiết các biến trạng thái tại nút 0 đã biết. Tại  $x = x_0 = 0$  ta có:

$$y = y_0; \quad M_z = M_{z0}$$

$$y'_M = y'_{M0}; \quad Q_y = Q_{y0}$$

Với các quan hệ trên, thay  $x = 0$  vào (13) và (15), ta được giá trị của các hằng số tích phân là:

Thay  $x = L$  và các hằng số tích phân vào (21-a,b,c) và (23), ta được:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{k}_{01} \mathbf{u}_0 \quad (26)$$

trong đó:

$\mathbf{u}_0$  là véc tơ trạng thái tại nút 0:

$$\mathbf{u}_0 = \{ y_0 \quad y'_{M0} \quad M_{z0} \quad Q_{y0} \quad 1 \}^T$$

$\mathbf{u}_1$  véc tơ trạng thái tại nút 1:

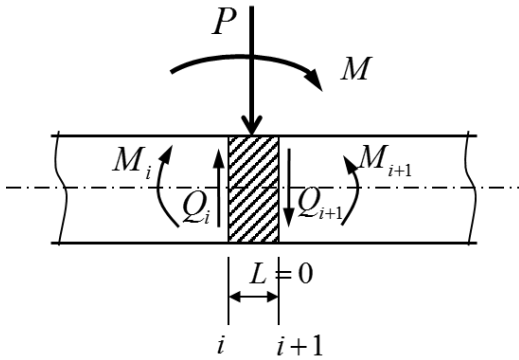
$$\mathbf{u}_1 = \{ y_1 \quad y'_{M1} \quad M_{z1} \quad Q_{y1} \quad 1 \}^T$$

$\mathbf{k}_{01}$  là ma trận truyền có xét đến biến dạng trượt cho đoạn 0-1.

$$\mathbf{k}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & L_{01} & \frac{-L_{01}^2}{2EI_z} & \frac{-L_{01}^3}{6EI_z} + \frac{L_{01}}{GA_{Q_y}} & \frac{q_0}{EI_z} \left( \frac{L_{01}^4}{24} - \frac{EI_z L_{01}^2}{2GA_{Q_y}} \right) \\ 0 & 1 & \frac{-L_{01}}{EI_z} & \frac{-L_{01}^2}{2EI_z} & \frac{q_0 L_{01}^3}{6EI_z} \\ 0 & 0 & 1 & L_{01} & \frac{-q_0 L_{01}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q_0 L_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

**3.3 Ma trận truyền tại vị trí đặt tải trọng tập trung**

Quan hệ giữa véc tơ trạng thái tại bên trái và bên phải lực tập trung (hình 4), nút  $i$  và nút  $i+1$  là:



**Hình 4.** Hình để xây dựng ma trận truyền tại tải trọng tập trung

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i \\ y'_{i+1} &= y'_i \\ M_{i+1} &= M_i + P \\ Q_{i+1} &= Q_i - P \end{aligned} \quad (28)$$

Thay (28) vào (15), và để ý  $L = 0$ , ta có ma trận truyền tại lực tập trung  $\mathbf{k}_0$  là:

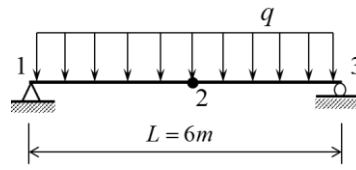
$$\mathbf{k}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

**4. Phê chuẩn thuật toán**

Để xác định tính đúng đắn của thuật toán ma trận truyền đã được trình bày ở trên, năm ví dụ tính toán chuyển vị của dầm một nhịp, với các điều kiện biên khác nhau được phân tích. Giá trị chuyển vị được so sánh với các kết quả giải tích đã được trình bày trong [3], và kết quả phân tích bằng SAP. Dầm có nhịp  $L = 6m$ , tải phân bố đều  $q = 30 \text{ kN/m}$ , tải tập trung  $P = 30 \text{ kN}$ . Với dầm tiết diện chữ nhật có  $\kappa_y = 1,2$ , hệ số Poisson  $\mu = 0,2$ , mô đun đàn hồi  $E = 30e+6 \text{ kN/m}^2$ . Với dầm tiết diện chữ I có  $\kappa_y$  được tính theo công thức trong bảng 1, hệ số Poisson  $\mu = 0,3$ , mô đun đàn hồi  $E = 200e+6 \text{ kN/m}^2$ .

Các phương trình (15) và (26) của phương pháp ma trận truyền được giải với sự hỗ trợ của Matlab[12], để xác định nội lực, chuyển vị tại các nút.

**4.1 Dầm đơn giản, chịu tải trọng phân bố đều  $q(\text{kN/m})$**



**Hình 5.** Dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều

a) *Lời giải giải tích:* Chuyển vị của dầm theo giải tích đã được trình bày chi tiết trong [3]:

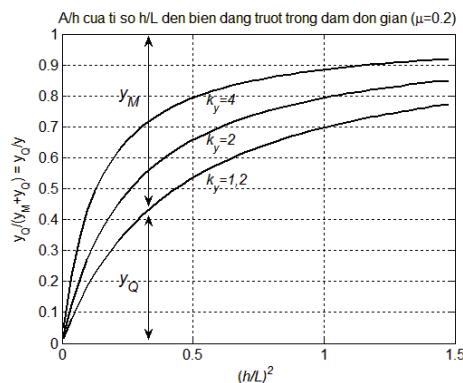
$$y_M = \frac{qL^3}{24EI}x - \frac{qL}{12EI}x^3 + \frac{q}{24EI}x^4 \quad (a)$$

$$y_Q = \frac{qL\kappa_y}{2GA}x - \frac{q\kappa_y}{2GA}x^2 \quad (b)$$

Để xác định tỉ lệ của chuyển vị do biến dạng trượt trong tổng chuyển vị, và ảnh hưởng của tỉ số chiều cao tiết diện với nhịp dầm  $h/L$  đến giá trị của chuyển vị trượt  $y_Q$ , từ phương trình (30) sau một số phép biến đổi ta có phần đóng góp của chuyển vị do biến dạng trượt trong tổng chuyển vị, tại giữa nhịp là:

$$\frac{y_Q}{y_M + y_Q} = \frac{1}{1 + \frac{1,25G}{\kappa_y E} \frac{1}{\left(\frac{h}{L}\right)^2}} \quad (31)$$

Từ công thức (31) có thể thấy, tỉ lệ  $y_Q/y$  phụ thuộc vào tỉ số  $h/L$ , vào hình dạng tiết diện ngang (hay hệ số hiệu chỉnh cắt  $\kappa_y$ ), vào tỉ số  $G/E$  (hay hệ số Poisson). Tỉ lệ  $y_Q/y$  được biểu thị trong hình 6.



**Hình 6.** Ảnh hưởng của  $h/L$  đến chuyển vị do biến dạng trượt trong dầm đơn giản

Từ hình 6 có thể thấy, tỉ số  $y_Q/y$  tỉ lệ thuận với  $h/L$  và  $\kappa_y$ .

b) *Lời giải của phương pháp ma trận truyền:* Véc tơ trạng thái tại các nút 1, 2, 3 của dầm trên hình 5, ứng với đầu trái, giữa dầm, và đầu phải, đã được gán điều kiện biên, lần lượt là:

## KẾT CẤU - CÔNG NGHỆ XÂY DỰNG

$$\mathbf{u}_1 = \{y_1 \quad y'_{M1} \quad M_{z1} \quad Q_{y1} \quad 1\}^T = \{0 \quad y'_{M1} \quad 0 \quad Q_{y1} \quad 1\}^T$$

$$\mathbf{u}_2 = \{y_2 \quad y'_{M2} \quad M_{z2} \quad Q_{y2} \quad 1\}^T$$

$$\mathbf{u}_3 = \{y_3 \quad y'_{M3} \quad M_{z3} \quad Q_{y3} \quad 1\}^T = \{0 \quad y'_{M3} \quad 0 \quad Q_{y3} \quad 1\}^T$$

Theo (27), với dầm  $b \times h = 0.2 \times 0.4\text{m}$ , ma trận truyền đoạn 1-2 và đoạn 2-3 là:

$$\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_{23} = \begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 & -0.000140625 & -0.000137025 & 0.0030020625 \\ 0 & 1.0 & -0.000093750 & -0.000140625 & 0.0042187500 \\ 0 & 0 & 1.000000000 & 3.000000000 & -135.000000000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000000000 & -90.000000000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000000000 \end{bmatrix}$$

Trước tiên, “quét” từ 1 đến 3 ta có  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{k}_{23}\mathbf{u}_2 = \mathbf{k}_{23}\mathbf{k}_{12}\mathbf{u}_1$ , hay:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ y'_{M3} \\ 0 \\ Q_{y3} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 6.0 & -0.0005625 & -0.0011178 & 0.049977 \\ 0 & 1.0 & -0.0001875 & -0.0005625 & 0.033750 \\ 0 & 0 & 1.0000000 & 6.0000000 & -540.000000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000000 & -180.000000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y'_{M1} \\ 0 \\ Q_{y1} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ trên, được:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.008437500000000 \\ 0 \\ 90.0000000000000 \\ 1.0000000000000 \end{bmatrix}$$

Tiếp theo, “quét” từ 1 đến 2 ta có  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{k}_{12}\mathbf{u}_1$ , hay:

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ y'_{M2} \\ M_{z2} \\ Q_{y2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 & -0.000140625 & -0.000137025 & 0.0030020625 \\ 0 & 1.0 & -0.000093750 & -0.000140625 & 0.0042187500 \\ 0 & 0 & 1.000000000 & 3.000000000 & -135.000000000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000000000 & -90.000000000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000000000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y'_{M1} \\ 0 \\ Q_{y1} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ trên, được:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0.015982312500 \text{ (là chuyển vị cần tìm tại điểm giữa dầm)} \\ 0.000000000000 \\ 135.000000000000 \\ 0.000000000000 \\ 1.000000000000 \end{bmatrix}$$

Làm tương tự cho các tiết diện khác, các kết quả phân tích dầm bằng phương pháp ma trận truyền, được so sánh với kết quả bởi giải tích và bởi SAP

(khi không kể đến chuyển vị do biến dạng trượt [13]), và được trình bày trong bảng 2 cho dầm tiết diện chữ nhật và bảng 3 cho dầm tiết diện chữ I.

**Bảng 2.** Chuyển vị giữa dầm tiết diện chữ nhật theo các lời giải

Tiết diện (mm)	Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải (mm)			Sai số giữa có và không xét đến trượt (%)
	Ma trận truyền	Giải tích [3]	SAP	
200x400	15.982	15.982	15.732	1.58
200x600	4.795	4.795	4.661	2.80
300x1000	0.718	0.718	0.671	7.00
300x1500	0.228	0.228	0.199	14.50

**Bảng 3. Chuyển vị giữa dầm tiết diện chữ I theo các lời giải**

Tiết diện (mm)	Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải (mm)			Sai số giữa có và không xét đến trượt (%)
	Ma trận truyền	Giải tích [3]	SAP	
HP8x36	51.98	51.98	50.82	2.28
HP36x800	0.11	0.11	0.09	22.20

Bảng 2 và 3 cho thấy, kết quả của phương pháp ma trận truyền rất phù hợp với kết quả của phương pháp giải tích. Ngoài ra, khi tiết diện dầm không quá lớn, thành phần chuyển vị do biến dạng trượt là vô cùng bé, kết quả của SAP (không kể đến chuyển vị do biến dạng trượt) phù hợp với kết quả của hai phương pháp còn lại, khi tiết diện dầm càng lớn, giá trị của chuyển vị do biến dạng trượt càng lớn, kết quả

của SAP càng khác xa kết quả của hai phương pháp còn lại.

**4.2 Dầm ngàm-khớp, tiết diện chữ nhật, chịu tải trọng phân bố đều q(kN/m)**

a) Lời giải giải tích: Tiết diện chữ nhật có  $\kappa_y = 1,2$ . Chuyển vị của dầm là:

$$y_M = \frac{qL^2}{16EI}x^2 - \frac{5qL}{48EI}x^3 + \frac{q}{24EI}x^4 \tag{a}$$

$$y_Q = \frac{(150L^2 + 72h^2(1+\mu))(1+\mu)qLh^2}{240EI(5L^2 + 3h^2(1+\mu))}x - \frac{(165L^2 + 72h^2(1+\mu))(1+\mu)qh^2}{240EI(5L^2 + 3h^2(1+\mu))}x^2 + \frac{15qLh^2(1+\mu)}{240EI(5L^2 + 3h^2(1+\mu))}x^3 \tag{b}$$

b) Lời giải của phương pháp ma trận truyền: Kết quả phân tích dầm bằng phương pháp ma trận truyền, được so sánh với kết quả bởi giải tích và bởi SAP (bảng 4).

**Bảng 4. Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải**

Tiết diện (mm)	Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải (mm)			Sai số giữa có và không xét đến trượt (%)
	Ma trận truyền	Giải tích [3]	SAP	
200x400	6.5	6.5	6.271	3.65
200x600	2.0	2.0	1.869	7.01
300x1000	0.3	0.3	0.274	9.49
300x1500	0.1	0.1	0.084	19.05

**4.3 Dầm hai đầu ngàm, tiết diện chữ nhật, chịu tải trọng phân bố đều q(kN/m)**

a) Chuyển vị của dầm theo giải tích:

$$y_M = \frac{qL^2}{24EI}x^2 - \frac{qL}{12EI}x^3 + \frac{q}{24EI}x^4 \tag{a}$$

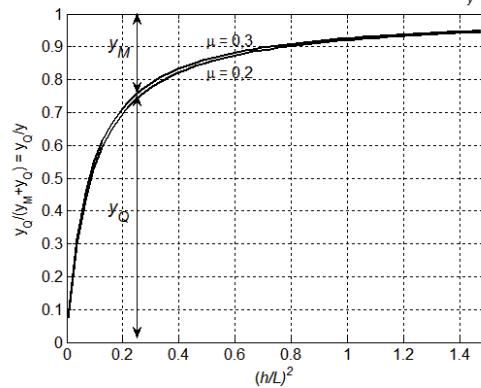
$$y_Q = \frac{qLh^2(1+\mu)}{10EI}x - \frac{qh^2(1+\mu)}{10EI}x^2 \tag{b}$$

Tỉ lệ của chuyển vị trượt do lực cắt trong tổng chuyển vị là:

$$\frac{y_Q}{y_M + y_Q} = \frac{1}{1 + \frac{1}{9,6(1+\mu)\left(\frac{h}{L}\right)^2}} \tag{34}$$

Tỉ lệ  $y_Q/y$  tại giữa dầm, với  $\kappa_y = 1,2$  được biểu thị trong hình 7.

A/h của tỉ số h/L đến biến dạng trượt trong dầm hai đầu ngàm ( $\kappa_y = 1.2$ )



**Hình 7. Ảnh hưởng của h/L đến chuyển vị do biến dạng cắt trong dầm hai đầu ngàm**

Hình 7 còn cho thấy, tỉ số Poisson ảnh hưởng không đáng kể đến  $y_Q$ .

b) Lời giải của phương pháp ma trận truyền: Kết quả phân tích dầm bằng phương pháp ma trận truyền, được so sánh với kết quả bởi giải tích và bởi SAP (bảng 5).

**Bảng 5. Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải**

Tiết diện (mm)	Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải (mm)			Sai số giữa có và không xét đến trượt (%)
	Ma trận truyền	Giải tích [3]	SAP	
200x400	3.326	3.326	3.076	8.13
200x600	1.045	1.045	0.911	14.71
300x1000	0.178	0.178	0.131	35.88
300x1500	0.068	0.068	0.039	74.36



**4.4 Dầm hai đầu ngàm, tiết diện chữ nhật, chịu tải trọng tập trung P tại giữa nhịp**

a) Chuyển vị của dầm theo giải tích:

Trong đoạn  $0 \leq x \leq L/2$  (đoạn 1).

$$y_M^{(1)} = \frac{PL}{16EI}x^2 - \frac{P}{12EI}x^3 \quad (a)$$

$$y_Q^{(1)} = \frac{PK_y}{2GA}x \quad (b)$$

Trong đoạn  $L/2 \leq x \leq L$  (đoạn 2).

(35)

$$y_M^{(2)} = \frac{PL^3}{192EI} - \frac{PL}{16EI}x^2 + \frac{P}{12EI}x^3 \quad (a)$$

$$y_Q^{(2)} = \frac{PLK_y}{4GA} - \frac{PK_y}{2GA}x \quad (b)$$

Tỉ lệ của chuyển vị do trượt trong tổng chuyển vị,  $y_Q / (y_M + y_Q)$  như phương trình (34).

b) Lời giải của phương pháp ma trận truyền: Kết quả phân tích dầm bằng phương pháp ma trận truyền, được so sánh với kết quả bởi giải tích và bởi SAP (bảng 6).

**Bảng 6. Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải**

Tiết diện (mm)	Chuyển vị giữa dầm theo các lời giải (mm)			Sai số giữa có và không xét đến trượt (%)
	Ma trận truyền	Giải tích [3]	SAP	
200x400	1.1	1.1	1.055	4.70
200x600	0.3485	0.3485	0.313	11.30
300x1000	0.0594	0.0594	0.045	32.00
300x1500	0.0229	0.0229	0.013	76.15

**5. Kết luận**

Bài báo đã xây dựng thuật toán ma trận truyền để xác định chuyển vị của dầm, có và không xét đến biến dạng trượt. Lời giải của thuật toán ma trận truyền hoàn toàn phù hợp với lời giải giải tích.

Vì có thể rời rạc hóa dầm thành các đoạn, nên thuật toán ma trận truyền rất hiệu quả cho các bài toán dầm có tiết diện thay đổi, dầm chịu tải trọng phân bố không đều, dầm có điều kiện biên phức tạp mà không có sẵn các lời giải giải tích.

Các đồ thị biểu thị phần đóng góp của chuyển vị do biến dạng trượt đến tổng chuyển vị của dầm, phụ thuộc vào chiều cao và hình dạng tiết diện dầm cũng đã được xây dựng.

Thành phần chuyển vị do cắt trong tổng chuyển vị không những phụ thuộc vào tỉ số chiều cao và nhịp dầm, mà còn phụ thuộc vào hình dạng tiết diện ngang dầm – hay hệ số hiệu chỉnh cắt  $\kappa_y$ . Nói chung, với các dầm phổ thông, tỉ số  $h/L$  không quá lớn thì chuyển vị do trượt là vô cùng bé.

Các dầm cao, dầm chuyển, một số dầm thành mỏng thì sự đóng góp của  $y_Q$  là rất đáng kể. Các ví dụ phân tích cho thấy, chuyển vị của dầm có thể tăng thêm 75% nếu xét đến biến dạng trượt, vì thế cần phải kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt trong tính toán.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- S.Timoshenko, J.N.Goodier (1951). Theory of elasticity. *Mc Graw - Hill, New York.*
- L. N. Hồng, L. N. Thạch (2011). Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.

- V. T. Thủy (2010). Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ thanh chịu uốn khi xét tới ảnh hưởng của biến dạng trượt. *Luận văn tiến sỹ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.*
- Caros A. Felippa (2005). The Amusing History of Shear-Flexible Beam Elements. *Report No. CU-CAS-05-01, Department of Aerospace Eng. Sci. and Center for Aerospace Strs., University of Colorado at Boulder, USA.*
- Archer, J. S., (1965). "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis using Finite-Element Techniques", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, vol. 3, pp. 1910–1918.*
- Sung Y.Back, Kenneth M. Will (2008). Shear-flexible thin-walled element for composite I-beams. *Engineering Structures, Vol. 30, Issue 5, 1447-1458.*
- N. T. N. Loan (2000). Các phương pháp số trong phân tích kết cấu. *Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.*
- H.G. Reimerdes (2009). Lecture notes, Fundamentals of Lightweight Design. *RWTH Aachen, Institute für Leichtbau.*
- E.C.Pestel and F.A. Leckie (1963). Matrix Methods in Elastomechanics, *McGraw-Hill, New York.*
- Cowper, R. G., (1966). "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", *Journal of Applied Mechanics, vol. 33, pp. 335–340.*
- Hibbit, Karlson and Sorensen (2004). ABAQUS Inc. *Theory manual, version 6.4.*
- Matlab, v7.0.1 (R14). The MathWorks, Inc. 1984-2004.
- SAP 2000, v14.2.2. Computers and Structures Inc. 1978-2010.

**Ngày nhận bài:** 12/6/2020.

**Ngày nhận bài sửa lần cuối:** 21/9/2020.

Transfer matrix method for deflection of beams with shear deformation