TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÙNG VƯƠNG
Tập 20, Số 3 (2020): 95-100

JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
HUNG VUONG UNIVERSITY
Vol. 20, No. 3 (2020): 95-100

ISSN 1859-3968

Email: tapchikhoahoc@hvu.edu.vn Website: www.hvu.edu.vn

VỀ KHÔNG ĐIỂM CỦA ĐA THỨC NHIỀU BIẾN TRÊN VÀNH GIAO HOÁN

Nguyễn Tiến Mạnh[1*]

[1]*Khoa Giáo dục Tiểu học và Mầm non, Trường Đại học Hùng Vương, Phú Thọ*

Ngày nhận bài: 08/4/2020; Ngày chỉnh sửa: 20/5/2020; Ngày duyệt đăng: 22/5/2020

Tóm tắt

Cho $f(x_1,\ldots,x_n)$ là một đa thức trên vành giao hoán A, bài báo này xây dựng một vành $B \supseteq A$ sao cho $f(x_1,\ldots,x_n)$ có không điểm trong không gian B^n khi các hệ tử cao nhất của $f(x_1,\ldots,x_n)$ khả nghịch. Bên cạnh đó, bài báo chỉ ra sự khác biệt đối với bài toán phân tích đa thức thành nhân tử, mối quan hệ giữa hai khái niệm: đa thức và hàm đa thức trên vành giao hoán.

Từ khóa: *Đa thức, không điểm, vành giao hoán.*

1. Đặt vấn đề

Cho $\mathbb{K}$ là một trường, như chúng ta đã biết mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ có bậc dương trên $\mathbb{K}$ có thể không có nghiệm trong $\mathbb{K}$. Tuy nhiên, luôn tồn tại một trường mở rộng $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{K}$ sao cho $f(x)$ có nghiệm trong $\mathbb{F}$ [1]. Do số nghiệm của $f(x)$ không vượt quá $\deg f(x)$ nên sau một số bước mở rộng, ta sẽ được một trường chứa đầy đủ các nghiệm của $f(x)$. Qua đó chúng ta thấy mọi đa thức bậc dương trên một trường đều có đầy đủ các nghiệm nếu ta xét chúng trong một trường "đủ rộng". Tiến xa hơn, người ta đã chỉ ra sự tồn tại của những trường mà mọi đa thức trên nó đều có nghiệm trong đó, loại trường này được gọi là trường đóng đại [2] mà ví dụ điển hình là trường số phức $\mathbb{C}$. Tổng quát hơn, luôn tồn tại một trường $\mathbb{F}$ là mở rộng đại số của $\mathbb{K}$ sao cho $\mathbb{F}$ là một trường đóng đại số [2], điều này cho thấy sự tồn tại phổ biến của mở rộng đóng đại số đối với một trường bất kỳ.

Giả sử $(x_1,\ldots,x_n)$ là các biến độc lập. Nhắc lại rằng không điểm của đa thức $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ là phần tử $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ thỏa mãn $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$ [3]. Trong trường hợp một biến số, chúng ta vẫn quen gọi không điểm là nghiệm. Nếu $\mathbb{F}$ là mở rộng đóng đại số của $\mathbb{K}$, bằng quy nạp ta có thể chứng minh mọi đa thức $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, $\deg f(x_1,\ldots,x_n) > 0$ đều có không điểm trong $\mathbb{F}^n$[4]. Như vậy sự tồn tại nghiệm cũng như không điểm của đa thức là phổ biến nếu xét trong một trường hoặc một không gian đủ rộng và điều này đã được trình bày một cách hệ thống trong nhiều tài liệu [1, 5, 6]. Tuy nhiên, đối với đa

*Email: manhnt79@gmail.com

thức trên một vành giao hoán, vấn đề này còn ít được đề cập đến. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chứng tỏ khi xét trên vành giao hoán, bài toán về sự tồn tại không điểm trong vành mở rộng của đa thức nhiều biến với hệ tử bậc cao nhất khả nghịch có điểm tương tự như đối với đa thức trên một trường. Ngoài ra, bài báo chỉ ra sự khác biệt đối với bài toán phân tích đa thức thành nhân tử, mối quan hệ giữa hai khái niệm: đa thức và hàm đa thức nhiều biến trên vành giao hoán.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Sự tồn tại không điểm của đa thức nhiều biến trong vành mở rộng

Cho số nguyên dương n, A là một vành giao hoán có đơn vị $1 \neq 0$ và đa thức bậc dương với các hệ tử cao nhất khả nghịch $f(x_1,\ldots,x_n) \in A[x_1,\ldots,x_n]$. Nếu A là một miền nguyên, thì A có trường các thương $\mathbb{K}$ (trường phân thức của A). Giả sử $\overline{\mathbb{K}}$ là mở rộng đóng đại số của $\mathbb{K}$. Khi đó như đã biết $f(x_1,\ldots,x_n)$ có không điểm trong $\overline{\mathbb{K}}^n$. Trong trường hợp tổng quát, gọi I là iđêan trong $A[x_1,\ldots,x_n]$ sinh bởi đa thức $f(x_1,\ldots,x_n)$. Xét đồng cấu: $\varphi : A \to \dfrac{A[x_1,\ldots,x_n]}{I}, a \mapsto \overline{a} = a + I.$ Nếu $\varphi(a) = \overline{0}$ $(a \in A)$ thì a chia hết cho $f(x_1,\ldots,x_n)$. Do đó tồn tại $g(x_1,\ldots,x_n)$ để $a = f(x_1,\ldots,x_n)g(x_1,\ldots,x_n)$. So sánh bậc hai vế suy ra $a = 0$. Vậy φ là đơn cấu nên ta có thể coi A như một vành con của vành thương $\dfrac{A[x_1,\ldots,x_n]}{I}$. Ta có $f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}) = \overline{f(x_1,\ldots,x_n)} = \overline{0}$ nên $f(x_1,\ldots,x_n)$ nhận $(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}) \in \left(\dfrac{A[x_1,\ldots,x_n]}{I}\right)^n$ làm không điểm, ở đây $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}$ lần lượt là ảnh của $x_1,\ldots,x_n$ trong $\dfrac{A[x_1,\ldots,x_n]}{I}$. Từ các khẳng định này, ta được định lý sau.

Định lý 2.1. Cho số nguyên dương n, A là một vành giao hoán có đơn vị $1 \neq 0$ và $f(x_1,\ldots,x_n) \in A[x_1,\ldots,x_n]$ là đa thức bậc dương với các hệ tử cao nhất khả nghịch. Khi đó tồn tại một vành mở rộng B của A sao cho $f(x_1,\ldots,x_n)$ có không điểm trong B^n.

Xét trong trường hợp đa thức một biến x và coi hệ tử cao nhất của *f(x)* bằng 1. Giả sử $\alpha \in B$ là một nghiệm của *f(x)*. Theo Định lý Bezout [1], ta có:

$$f(x) = (x-\alpha)g(x),\ g(x) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} \in B[x].$$

Lại áp dụng định lý trên cho *g(x)* ta suy ra có vành *C* là một mở rộng của *B* để *g(x)* có nghiệm trong *C*. Tiếp tục quá trình này với chú ý rằng sau mỗi bước đa thức được xét có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức bước trước đó, sau n bước ta được một vành mở rộng B của *A* và các phần tử $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in B$ sao cho $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$.

Ví dụ sau cung cấp thêm một số thông tin nhằm chỉ ra sự khác biệt giữa sự tồn tại nghiệm của đa thức trên vành giao hoán và sự tồn tại nghiệm của đa thức trên một trường.

Ví dụ 2.2. Cho $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ là hai trường. Gọi $\overline{\mathbb{K}}_1, \overline{\mathbb{K}}_2$ lần lượt là hai bao đóng đại số của $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$. Xét vành $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$. Dễ thấy đây là một vành giao hoán với phần tử đơn vị là (1,1) và phần tử không là (0,0). Tuy nhiên, nó không phải là một miền nguyên vì $(1,0),(0,1)\in\mathbb{K}_1\times\mathbb{K}_2\setminus\{(0,0)\}$ nhưng (1,0)(0,1) = (0,0). Xét đa thức:

$$f(x)=(a_{1n},a_{2n})x^n+(a_{1n-1},a_{2n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_{10},a_{20})\in(\mathbb{K}_1\times\mathbb{K}_2)[x].$$

Ta có
$$f(x)=(a_{1n},0)x^n+(a_{1n-1},0)x^{n-1}+\cdots+(a_{10},0)$$
$$+(0,a_{2n})x^n+(0,a_{2n-1})x^{n-1}+\cdots+(0,a_{20})\in(\mathbb{K}_1\times\mathbb{K}_2)[x].$$

Đặt $f_{10}(x)=(a_{1n},0)x^n+(a_{1n-1},0)x^{n-1}+\cdots+(a_{10},0), f_1(x)=a_{1n}x^n+a_{1n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{10}$,
$f_{20}(x)=(0,a_{2n})x^n+(0,a_{2n-1})x^{n-1}+\cdots+(0,a_{20}), f_2(x)=a_{2n}x^n+a_{2n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{20}$.

Ta có $f_1(x)\in\mathbb{K}_1[x],\ f_2(x)\in\mathbb{K}_2[x]$. Giả sử deg$f_1(x)$, deg$f_2(x)$ > 0. Do tính chất đóng đại số của $\overline{\mathbb{K}}_1,\overline{\mathbb{K}}_2$, $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều lần lượt phân rã thành tích các nhân tử bậc nhất trên $\overline{\mathbb{K}}_1,\overline{\mathbb{K}}_2$. Cho $\alpha\in\overline{\mathbb{K}}_1,\beta\in\overline{\mathbb{K}}_2$ theo thứ tự là nghiệm của $f_1(x)$ và $f_2(x)$. Khi đó chúng ta hoàn toàn có thể chứng minh được các khẳng định sau:

(i) Với mọi $(\lambda_1,\lambda_2)\in\overline{\mathbb{K}}_1\times\overline{\mathbb{K}}_2$, (α,λ_2) là nghiệm của $f_{10}(x)$ và (λ_1,β) là nghiệm của $f(x)$.

(ii) $(\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{K}}_1\times\overline{\mathbb{K}}_2$ là nghiệm của $f(x)$.

(iii) Nếu $(\lambda,\mu)\in\overline{\mathbb{K}}_1\times\overline{\mathbb{K}}_2$ là nghiệm của $f(x)$ thì λ, μ lần lượt là nghiệm của $f_1(x)$, $f_2(x)$.

(iv) Nếu $f(x)\neq 0$ và $\deg f_1(x)\deg f_2(x)=0$ thì $f(x)$ không có nghiệm trong $\overline{\mathbb{K}}_1\times\overline{\mathbb{K}}_2$.

(v) Giả sử $\deg f_1(x)=\deg f_2(x)=n>0$ và $f_1(x)=a_{1n}\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i), f_2(x)=a_{2n}\prod_{i=1}^{n}(x-\beta_i)$, ở đây $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\overline{\mathbb{K}}_1,\ \beta_1,\ldots,\beta_n\in\overline{\mathbb{K}}_2$. Khi đó $f(x)=(a_{1n},a_{2n})\prod_{i=1}^{n}\left[x-(\alpha_i,\beta_i)\right]$.

Chú ý 2.3. Khẳng định (v) trong ví dụ 2.2 cho thấy sự phân tích một đa thức thành nhân tử trong vành giao hoán nhìn chung không duy nhất (theo nghĩa sai khác các phần tử khả nghịch và thứ tự các nhân tử).

(ii) Các kết luận trong ví dụ 2.2 hoàn toàn có thể được mở rộng một cách tương tự cho trường hợp gồm hữu hạn trường $\mathbb{K}_1,\mathbb{K}_2,\ldots,\mathbb{K}_m$.

2.2. Mối quan hệ giữa đa thức và hàm đa thức trên vành giao hoán

Khái niệm đa thức và hàm đa thức được trình bày đầy đủ và hệ thống tại bậc học đại học trong các giáo trình về đại số [5]. Theo định nghĩa, mỗi đa thức trên một vành giao hoán xác định một hàm đa thức tương ứng nhận giá trị trên vành giao hoán đó. Cho $f(x_1,\ldots,x_n)\in A[x_1,\ldots,x_n]$, ánh xạ

$$\overline{f}: A^n\to A,\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\mapsto f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

được gọi là một hàm đa thức ứng với $f(x_1,\ldots,x_n)$ hay có thể nói $f(x_1,\ldots,x_n)$ sinh ra $\overline{f}$. Gọi $\mathcal{F}$ là tập các hàm đa thức như đã nêu, dễ thấy $\mathcal{F}$ là một vành giao hoán có đơn vị và ánh xạ

$$\varphi: A[x_1,\ldots,x_n]\to\mathcal{F},\ f(x_1,\ldots,x_n)\mapsto\overline{f}$$

là một toàn cấu. Trong trường hợp quen thuộc, khi xét đa thức trên các vành số, trường số quen thuộc (vành số nguyên, trường số hữu tỉ, trường số thực, trường số phức) thì mỗi hàm đa thức chính là một hàm số xác định trên các tập số quen thuộc đó. Câu hỏi đặt ra là: Khi nào toàn cấu đã cho là một đẳng cấu? Nghĩa là khi nào ta có thể đồng nhất hai khái niệm trên ($f(x_1,\ldots,x_n)\equiv \overline{f}$)? Nếu φ là đẳng cấu, người ta nói rằng: trên vành *A,* hai khái niệm đa thức và hàm đa thức là đồng nhất với nhau [1].

Chú ý 2.4. Rõ ràng mỗi đa thức xác định duy nhất một hàm đa thức, tuy nhiên điều ngược lại nhìn chung không đúng. Chẳng hạn, đa thức $x^2+x\in \mathbb{Z}_2[x]\backslash\{0\}$ nhưng lại sinh ra hàm không $F:\ \mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2, \alpha\mapsto\overline{0}$. Tổng quát hơn, khi $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$ gồm *k* phần tử, đa thức $\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\in A[x]\backslash\{0\}$ cũng sinh ra hàm không $F:\ A\to A, \alpha\mapsto 0$.

Định lý dưới đây chỉ ra rằng nếu vành cơ sở là một miền nguyên vô hạn thì có một đẳng cấu từ vành các đa thức lên vành các hàm đa thức.

Định lý 2.5. Cho A là một miền nguyên vô hạn. Toàn cấu

$\varphi: A[x_1,\ldots,x_n]\to F,\ f(x_1,\ldots,x_n)\mapsto \overline{f}$

là một đẳng cấu.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng tỏ φ là đơn cấu, nghĩa là nếu $\varphi\big(f(x_1,\ldots,x_n)\big)=0$ hay tương đương với $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0$ với mọi $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in A$ thì phải có $f(x_1,\ldots,x_n)=0.$ Chứng minh được tiến hành bằng quy nạp theo số biến n. Khi $n=1,$ từ $f(\alpha_1)=0$ với mọi $\alpha_1\in A$ suy ra $f(x_1)=0$ vì số nghiệm của đa thức trên miền nguyên không vượt quá số bậc. Trong trường hợp *n* > 1 viết:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=g_d(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^d+g_{d-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^{d-1}+\cdots+g_1(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n+g_0(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

Với $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\in A$ tùy ý cho trước, ta có:

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=g_d(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\alpha_n^d+g_{d-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\alpha_n^{d-1}+\cdots+g_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\alpha_n+g_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})=0$$

với mọi $\alpha_n\in A$. Nghĩa là đa thức $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},x_n)$ biến x_n nhận mọi $\alpha_n\in A$ làm nghiệm. Do đó $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},x_n)=0.$ Điều này dẫn đến

$$g_d(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})=g_{d-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})=\cdots=g_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})=g_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})=0.$$

Do tính tùy ý của $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\in A$ và giả thiết quy nạp áp dụng cho trường hợp n – 1 biến suy ra:

$$g_d(x_1,\ldots,x_{n-1})=g_{d-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})=\cdots=g_1(x_1,\ldots,x_{n-1})=g_0(x_1,\ldots,x_{n-1})=0.$$

Vậy $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ và do đó φ là đơn cấu.

Nói riêng, khi vành cơ sở rơi vào các trường hợp quen thuộc: vành số nguyên, trường số hữu tỉ, trường số thực, trường số phức thì chúng ta hoàn toàn có thể đồng nhất khái niệm đa thức với khái niệm hàm đa thức. Đó là lý do mà tại bậc học phổ thông, trong nhiều bài toán, khái niệm đa thức được xem xét dưới cả hai quan điểm: đại số và hàm số, nhưng kết quả thu được vẫn thống nhất. Phần này đưa ra một số ví dụ góp phần làm rõ hơn các lớp vành mà trên đó chúng ta không thể đồng nhất chúng.

Như chúng ta đã biết nếu vành cơ sở A là một miền nguyên, thì mỗi đa thức khác không trên A luôn có số nghiệm không vượt quá bậc của nó [1]. Các ví dụ sau chứng tỏ mối quan hệ giữa số nghiệm và bậc của đa thức trên vành giao hoán không là miền nguyên xảy ra hoàn toàn khác.

Ví dụ 2.6. Cho số nguyên dương n > 1. Xét vành $A = \dfrac{\mathbb{R}[x]}{(x^n)}$, với (x^n) là iđêan sinh bởi x^n. Rõ ràng A là vành giao hoán vô hạn phần tử. Dễ dàng kiểm tra mọi phần tử thuộc tập vô hạn $\left\{\overline{ax} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ đều là nghiệm của $t^n \in A[t]$ (đa thức bậc n với biến t).

Ví dụ 2.7. Xét vành

$$\mathbb{Z}_2^\infty = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \mid a_k \in \mathbb{Z}_2, k = 1, \ldots, n, \ldots\right\}$$

với hai phép toán:

+) phép cộng: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$

+) phép nhân: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n, \ldots)$.

Rõ ràng $\mathbb{Z}_2^\infty$ là một vành giao hoán vô hạn với phần tử không $0 = (\overline{0}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}, \ldots)$, phần tử đơn vị $1 = (\overline{1}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}, \ldots)$. Đa thức $f(x) = x^2 + x$ nhận mọi phần tử của $\mathbb{Z}_2^\infty$ làm nghiệm. Thật vậy:

$$f(a) = a^2 + a = (a_1^2 + a_1, a_2^2 + a_2, \ldots, a_n^2 + a_n, \ldots) = (\overline{0}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}, \ldots) = 0 \text{ [5].}$$

Ví dụ 2.8. Xét vành giao hoán $\mathbb{Z}_2^\infty$ và đa thức n biến

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^2 + x_1)(x_2^2 + x_2)\cdots(x_n^2 + x_n) \in \mathbb{Z}_2^\infty[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Dễ thấy đa thức này nhận mọi phần tử của $\left(\mathbb{Z}_2^\infty\right)^n$ làm không điểm.

Ví dụ 3.4 và Ví dụ 3.5 đưa chúng ta đến kết quả mở rộng của [7, Định lý 2.4].

Định lý 2.9. Tồn tại một vành giao hoán gồm vô hạn phần tử sao cho trên đó có ít nhất một đa thức khác không nhận mọi bộ phần tử của vành làm không điểm.

Từ định lý này, ta rút ra các hệ quả sau

Hệ quả 2.10. (i) Tồn tại một vành giao hoán gồm vô hạn phần tử sao cho trên đó có hai đa thức phân biệt sinh ra cùng một hàm đa thức.

(ii) Tồn tại một vành giao hoán gồm vô hạn phần tử sao cho trên đó không thể đồng nhất hai khái niệm đa thức và hàm đa thức.

Hệ quả 2.10 có thể xem như một mở rộng của [7, Hệ quả 2.5] từ vành đa thức một biến sang vành đa thức nhiều biến.

3. Kết luận

Như vậy sự tồn tại của không điểm đa thức trên vành giao hoán trong trường hợp các hệ tử bậc cao nhất của đa thức khả nghịch là phổ biến. Vấn đề sẽ trở nên phức tạp hơn khi xét cho trường hợp tổng quát. Nghiên cứu cũng chỉ ra rằng trên vành giao hoán nói chung, số nghiệm của đa thức có thể là vô số thậm chí đa thức có thể triệt tiêu tại mọi điểm ngay cả khi vành cơ sở là vô hạn. Ngoài ra, kết quả phân tích đa thức cũng không còn đảm bảo tính duy nhất của các nhân tử. Về mối quan hệ giữa hai khái niệm: đa thức và hàm đa thức như trên đã trình bày, hai khái niệm này hoàn toàn có thể đồng nhất khi vành cơ sở là một miền nguyên vô hạn. Đó là lý do tại bậc học phổ thông, chúng ta vẫn nghiên cứu đa thức theo cả hai quan điểm: đại số (xem xét đa thức như đã định nghĩa) và hàm số (coi đa thức chính là hàm đa thức tương ứng với nó) mà vẫn không gặp mâu thuẫn vì chúng được xét trên các miền nguyên và các trường vô hạn quen thuộc, đó là vành số nguyên, trường số hữu tỉ, trường số thực, trường số phức. Các ví dụ lưu ý cho ta rằng nhìn chung chúng không tương đương trên các lớp vành: miền nguyên hữu hạn, vành giao hoán vô hạn không là miền nguyên. Kết quả nghiên cứu cho thấy muốn hiểu bản chất hơn một vấn đề sơ cấp thì cần thiết phải xem xét nó một cách toàn diện, không nên thoát ly với khái niệm gốc và các nội dung liên quan của toán học hiện đại.

Tài liệu tham khảo

[1] Hoàng Xuân Sính (1998). Đại số đại cương. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[2] Dương Quốc Việt (2007). Cơ sở lý thuyết Galois. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, Hà Nội.

[3] Markus P. Brodmann (2001). Lectures on local cohomology. Institute of Mathematics, Ha Noi.

[4] Gopalakrishnan N. S. (1984). Commutative algebra. Oxonian Press, New Dehli.

[5] Hoàng Kỳ & Hoàng Thanh Hà (2009). Đại số sơ cấp và Thực hành giải Toán. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, Hà Nội.

[6] Ngô Việt Trung (2012). Nhập môn Đại số giao hoán và Hình học đại số. Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.

[7] Nguyễn Tiến Mạnh & Nguyễn Huyền Trang (2012). Về mối quan hệ giữa đa thức và hàm đa thức trên vành giao hoán. Tạp chí Giáo dục, 128-129.

ON ZERO-POINTS OF POLYNOMIALS WITH MANY VARIABLES OVER COMMUTATIVE RINGS

Nguyen Tien Manh[1]

[1]Faculty of Preschool and Primary Education, Hung Vuong University, Phu Tho

Abstract

Let $f(x_1,...,x_n)$ be a polynomial over the commutative ring A, this paper builds a ring $B \supseteq A$ such that there is a zero-point of $f(x_1,...,x_n)$ in B^n when the highest coefficients of $f(x_1,...,x_n)$ are inversible. Moreover, the paper shows the difference about the polynomial analysis problem into factors, the relationship between polynomial and polynomial function over commutative rings.

Keywords: *Polynomial, zero-point, commutative ring.*