

## NGHIÊN CỨU THUẬT TOÁN DỰA TRÊN CÁC GÓC KHỐI CHO PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI RBF-FD GIẢI PHƯƠNG TRÌNH POISSON TRÊN MIỀN PHỨC TẠP TRONG KHÔNG GIAN 3 CHIỀU

Ngô Mạnh Tường\*, Nguyễn Thị Thanh Giang, Nguyễn Thị Nhung  
*Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên*

### TÓM TẮT

Thuật toán chọn tâm dựa trên các góc khối cho phương pháp không lưới RBF-FD (Radial Basis Function - Finite Difference) giải phương trình Poisson trong không gian 3 chiều đã được giới thiệu bởi các tác giả Oleg Davydov, Đặng Thị Oanh và Ngô Mạnh Tường (2020). Thuật toán này rất hiệu quả trên các bài toán có miền hình học là khối hình hộp hoặc khối cầu. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày thuật toán cải tiến từ thuật toán dựa trên các góc khối cho phương pháp RBF-FD trên bài toán có miền hình học phức tạp. Kết quả thử nghiệm số cho thấy nghiệm xấp xỉ của phương pháp không lưới RBF-FD sử dụng thuật toán cải tiến có sự ổn định và độ chính xác cao hơn nghiệm xấp xỉ của phương pháp phần tử hữu hạn và các kết quả đã công bố.

**Từ khóa:** Thuật toán dựa trên các góc khối; thuật toán chọn giá véctơ trọng số; thuật toán chọn tâm; phương pháp RBF-FD; phương pháp không lưới.

*Ngày nhận bài: 24/8/2020; Ngày hoàn thiện: 27/11/2020; Ngày đăng: 30/11/2020*

## RESEARCH THE OCTANT-BASED ALGORITHM FOR MESHLESS RBF-FD METHODS TO SOLVE THE POISSON EQUATION ON COMPLICATED 3D DOMAINS

Ngo Manh Tuong\*, Nguyen Thi Thanh Giang, Nguyen Thi Nhung  
*TNU - University of Information and Communication Technology*

### ABSTRACT

The algorithm of the octant-based stencil selection for the Radial Basis Function -Finite Difference (RBF-FD) method for solving the Poisson equations in 3D was introduced by Oleg Davydov, Thi Oanh Dang, and Manh Tuong Ngo (2020). This algorithm is very effective for testing problems on geometrical domains which are cubes or spheres. In this paper, we presents an algorithm improved from the algorithm of the octant-based stencil selection for the problem on complicated geometric domains. The numerical experiments showed that the approximate solution of the RBF-FD method using the improved algorithm had higher stability and accuracy than the approximation solution of FEM and the published results.

**Keywords:** the octant-based algorithm; the stencil selection algorithm; the center selection algorithm; the RBF-FD method; the meshless method.

*Received: 24/8/2020; Revised: 27/11/2020; Published: 30/11/2020*

\* Corresponding author. Email: nmtuong@ictu.edu.vn

## 1. Giới thiệu

Xét bài toán: Cho miền mở  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Tìm hàm  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$\begin{aligned} Du &= f & \text{trong } \Omega; \\ u &= g & \text{trên } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

trong đó  $f$  xác định trên  $\Omega$ ,  $g$  xác định trên  $\partial\Omega$  và

$$Du = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Phương pháp không lưới RBF-FD giải bài toán (1.1) là phương pháp sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính RBF với cách tiếp cận địa phương, dựa trên sự rời rạc hóa giống như phương pháp sai phân, để tính xấp xỉ nghiệm tại một số điểm rời rạc trong miền xác định [1], [2]. Phương pháp này được giới thiệu lần đầu tiên năm 2003 bởi Tolstykh và Shirobokov, bằng việc sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính RBF tính véc tơ trọng số dựa trên cấu trúc của phương pháp sai phân hữu hạn giải phương trình đạo hàm riêng elliptic trong không gian 2 chiều [3]. Năm 2006, Wright và Fornberg tiếp tục giới thiệu phương pháp trong không gian 2 chiều nhờ sử dụng nội suy Hermite [4]. Năm 2011 và năm 2017, các tác giả Oleg Davydov, Đặng Thị Oanh và Hoàng Xuân Phú giới thiệu phương pháp RBF-FD với nội suy đơn điểm, nội suy đa điểm, đề xuất các thuật toán chọn tập các tâm hỗ trợ phương pháp không lưới tính véc tơ trọng số, thuật toán sinh tâm thích nghi [5], thuật toán tìm tham số hình dạng tối ưu cho nội suy hàm cơ sở bán kính [6] và phát triển thuật toán chọn tâm, thuật toán sinh tâm thích nghi trên các bài toán có hình học phức tạp, hàm  $f$  có kỳ dị hoặc độ dao động lớn [7]. Gần đây thuật toán chọn tâm cho phương pháp không lưới RBF-FD đã được giới thiệu trong không gian 3 chiều [1], [2], đó là thuật toán chọn  $k$ - điểm gần nhất [2] và các thuật toán chọn tâm dựa trên các góc khối [1]. Các thuật toán này rất hiệu quả trên các bài toán có miền  $\Omega$  là khối hình hộp hoặc khối hình cầu, tuy nhiên với bài toán có miền hình học phức tạp (Bài toán 3, [1]) thì độ chính xác của nghiệm xấp xỉ của phương pháp RBF-FD chưa

tốt, vì vậy trong bài báo này, chúng tôi tiếp tục cải tiến thuật toán dựa trên góc khối để cải thiện độ chính xác của nghiệm của phương pháp không lưới RBF-FD cho bài toán có miền hình học phức tạp.

Bài báo gồm 5 phần: Sau Phần 1 giới thiệu là Phần 2 miêu tả cách rời rạc bài toán (1.1) của phương pháp RBF-FD; Phần 3, giới thiệu thuật toán chọn tâm hỗ trợ dựa trên các góc khối đã được cải tiến; Phần 4, trình bày kết quả thử nghiệm số đối sánh với các thuật toán đã được giới thiệu trong [1], [2] và Phần 5 là Kết luận.

## 2. Rời rạc bài toán

Đặc trưng của phương pháp RBF-FD là tính véc tơ trọng số bởi nội suy hàm cơ sở bán kính RBF [1]-[7]. Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu công thức tính véc tơ trọng số và rời rạc bài toán (1.1) cho trường hợp tổng quát trên  $\mathbb{R}^d$ .

Cho  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm cơ sở bán kính xác định dương,  $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , với  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm liên tục và  $\|\cdot\|$  là chuẩn Euclide trong  $\mathbb{R}^d$ , xem chi tiết trong [8]-[10].

Giả sử tập  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$  là tập các tâm rời rạc. Ký hiệu  $X_{\text{int}} := X \cap \Omega$  là tập các tâm nằm trong miền và  $\partial X := X \cap \partial\Omega$  là tập các tâm nằm trên biên. Với mỗi tâm  $x_i \in X_{\text{int}}$ , ta chọn được *tập các tâm hỗ trợ* phương pháp không lưới

$$X_i := \{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}\} \subset X, x_0^{(i)} = x_i.$$

Khi đó hàm nội suy RBF  $s$  của hàm liên tục  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  là

$$s(x) = \sum_{j=0}^k c_j^{(i)} \Phi(x - x_j^{(i)}) + d, x \in X_i; \quad (2.1)$$

$$s(x_j^{(i)}) = u(x_j^{(i)}), j = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (2.2)$$

trong đó  $d$  là hằng số và  $c_j^{(i)}$  là các hệ số nội

suy thỏa mãn điều kiện nội suy (2.2), suy ra bởi công thức

$$\sum_{j=0}^k c_j^{(i)} \Phi(x_l^{(i)} - x_j^{(i)}) + d = u(x_l^{(i)}),$$

$$l = 0, 1, \dots, k;$$

$$\sum_{j=0}^k c_j^{(i)} = 0,$$

hay

$$\begin{bmatrix} \Phi_{X_i} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{(i)} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u|_{X_i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

trong đó  $\mathbf{1}^T := \underbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]}_{k+1}$ ,

$$\Phi_{X_i} := \begin{pmatrix} \Phi(0) & \dots & \Phi(x_0^{(i)} - x_k^{(i)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(x_k^{(i)} - x_0^{(i)}) & \dots & \Phi(0) \end{pmatrix},$$

$$c^{(i)} := \begin{pmatrix} c_0^{(i)} \\ c_1^{(i)} \\ \vdots \\ c_k^{(i)} \end{pmatrix}, \quad u|_{X_i} := \begin{pmatrix} u(x_0^{(i)}) \\ u(x_1^{(i)}) \\ \vdots \\ u(x_k^{(i)}) \end{pmatrix}.$$

Vì  $\phi$  là hàm xác định dương trên  $X_i$  nên  $\Phi_{X_i}$  là ma trận đối xứng xác định dương, do đó giải phương trình (2.3) ta luôn tìm được duy nhất hệ số tương ứng là

$$\begin{bmatrix} c^{(i)} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{X_i} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u|_{X_i} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cho  $D$  là toán tử vi phân. Ta xấp xỉ  $Du(x_i)$

$$Du(x_i) \approx Ds(x_i) = \sum_{j=0}^k c_j^{(i)} D\Phi(x_i - x_j^{(i)})$$

$$= \begin{bmatrix} c^{(i)} \\ d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D\Phi(x_i - \cdot)|_{X_i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u|_{X_i} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_{X_i} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D\Phi(x_i - \cdot)|_{X_i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u|_{X_i} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=0}^k w_j^{(i)} u(x_j^{(i)}), \quad (2.4)$$

với

$$D\Phi(x_i - \cdot)|_{X_i} := \begin{pmatrix} D\Phi(x_i - x_0^{(i)}) \\ D\Phi(x_i - x_1^{(i)}) \\ \vdots \\ D\Phi(x_i - x_k^{(i)}) \end{pmatrix}$$

và  $w$  được gọi là véc tơ trọng số thỏa mãn phương trình

$$\begin{bmatrix} \Phi_{X_i} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\Phi(x_i - \cdot)|_{X_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Áp dụng công thức (2.4) khi  $d = 3$ , ta được bài toán rời rạc của bài toán (1.1) là

$$\sum_{j=0}^k w_j^{(i)} \hat{u}(x_j^{(i)}) = f(x_i), \quad x_i \in X_{\text{int}}; \quad (2.6)$$

$$u(x_j) = g(x_j) \quad x_j \in \partial X,$$

trong đó  $\hat{u}$  là nghiệm xấp xỉ của nghiệm  $u$  trên  $X_{\text{int}}$ .

Để giải bài toán (2.6), ta cần tìm được các véc tơ trọng số bởi công thức (2.5) với mọi  $x_i \in X_{\text{int}}$ . Độ chính xác của mỗi véc tơ trọng số  $w^{(i)}$  với  $x_i \in X_{\text{int}}$ , phụ thuộc vào việc chọn tập các tâm hỗ trợ  $X_i \subset X$  tương ứng. Trong phần tiếp theo, bài báo sẽ giới thiệu thuật toán chọn bộ tâm này cho phương pháp không lưới RBF-FD.

### 3. Thuật toán dựa trên các góc khối

Với mỗi  $x_i \in X_{\text{int}}$  mục tiêu của thuật toán là chọn được tập tâm hỗ trợ gồm  $k$  điểm

$$X_i = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}\} \subset X,$$

xung quanh góc  $x_i$  thỏa mãn điều kiện vừa gần về mặt khoảng cách đến tâm  $x_i$ , vừa đều về mặt góc.

Trong không gian 3 chiều, các tác giả đã giới thiệu thuật toán chọn tập tâm hỗ trợ là  $k$ -điểm gần nhất trong [2], thuật toán này đảm bảo điều kiện về mặt khoảng cách, nhưng không đảm bảo điều kiện về mặt góc. Để đảm bảo cả 2 mục tiêu, các tác giả đã giới thiệu thuật toán dựa trên 8- góc khối (Thuật toán 1, [1]) và thuật toán dựa trên 16-góc khối (Thuật toán 2, [1]). Các thuật toán bắt đầu với việc phân hoạch  $m$  điểm  $\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}\} \subset X \setminus \{x_i\}$  gần  $x_i$  nhất vào 8-góc khối hoặc 16-góc khối dựa trên dấu của các thành phần tọa độ của véc tơ  $\overrightarrow{x_i x_j^{(i)}} = x_j^{(i)} - x_i =: (a_j^{(i)}, b_j^{(i)}, c_j^{(i)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , ( $m > k$ ) như Bảng 1 và số điểm được chọn cho tập tâm hỗ trợ  $X_i$  là  $k = 16$  để mật độ ma trận hệ số của hệ phương (2.6) xấp xỉ mật độ của ma trận cứng của phương pháp phần tử hữu hạn.

Thuật toán 8-góc khối sẽ chọn 2 điểm gần nhất trên mỗi góc khối, còn thuật toán 16-góc khối chọn 1 điểm gần nhất trên mỗi góc khối. Tuy nhiên, với các bài toán có miền hình học phức tạp, việc chọn 2 điểm gần nhất trên một góc khối hoặc một điểm trên một góc khối sẽ có thể chọn được điểm có khoảng cách rất xa so với tâm  $x_i$ , hoặc 2 điểm trên cùng một góc khối có thể ở rất gần nhau về mặt góc. Để khắc phục những khuyết điểm này, trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu thuật toán cải tiến của thuật toán dựa trên 16-góc khối. Chúng tôi chọn thuật toán này vì nghiệm của phương pháp RFD-FD khi sử dụng thuật toán 16-góc khối có độ chính xác cao nhất so với các thuật toán khác được giới thiệu trong [1], hơn nữa thuật toán 8-góc khối cũng có thể làm hoàn toàn tương tự.

**Bảng 1.** Bảng chia 16 - góc khối

Góc khối	$a_j^{(i)}$	$b_j^{(i)}$	$c_j^{(i)}$	điều kiện
O <sub>1</sub>	+	+	+	$a_j^{(i)} \geq b_j^{(i)}$
O <sub>2</sub>	+	+	+	$a_j^{(i)} < b_j^{(i)}$
O <sub>3</sub>	+	+	-	$a_j^{(i)} \geq b_j^{(i)}$
O <sub>4</sub>	+	+	-	$a_j^{(i)} < b_j^{(i)}$
O <sub>5</sub>	+	-	+	$a_j^{(i)} \geq c_j^{(i)}$
O <sub>6</sub>	+	-	+	$a_j^{(i)} < c_j^{(i)}$
O <sub>7</sub>	+	-	-	$-b_j^{(i)} \geq -c_j^{(i)}$
O <sub>8</sub>	+	-	-	$-b_j^{(i)} < -c_j^{(i)}$
O <sub>9</sub>	-	+	+	$b_j^{(i)} \geq c_j^{(i)}$
O <sub>10</sub>	-	+	+	$b_j^{(i)} < c_j^{(i)}$
O <sub>11</sub>	-	+	-	$-a_j^{(i)} \geq -c_j^{(i)}$
O <sub>12</sub>	-	+	-	$-a_j^{(i)} < -c_j^{(i)}$
O <sub>13</sub>	-	-	+	$-a_j^{(i)} \geq -b_j^{(i)}$
O <sub>14</sub>	-	-	+	$-a_j^{(i)} < -b_j^{(i)}$
O <sub>15</sub>	-	-	-	$-a_j^{(i)} \geq -c_j^{(i)}$
O <sub>16</sub>	-	-	-	$-a_j^{(i)} < -c_j^{(i)}$

Thuật toán cải tiến được chia làm hai công đoạn, công đoạn tiền xử lý và công đoạn chọn điểm tốt. Thuật toán cũng bắt đầu với  $m$  điểm gần  $x_i$  nhất, công đoạn tiền xử lý sẽ thay thế điểm không thuộc miền bằng điểm trên biên gần hơn, loại đi các điểm quá gần nhau và điểm quá xa tâm  $x_i$ . Công đoạn thứ 2 sẽ phân hoạch các điểm còn lại vào 16-góc khối như trong Bảng 1 và chọn một điểm gần nhất trên mỗi góc khối.

#### Thuật toán:

*Input:*  $X, x_i \in X_{\text{int}}$ .

*Output:*  $X_i, X'_i$ .

*Các tham số:*  $m \geq 16$  (số tâm ban đầu gần  $x_i$ ),  $\gamma$  hệ số khoảng cách nhỏ nhất,  $\rho$  hệ số khoảng cách lớn nhất.

*Khởi tạo:*  $X_i := \{x_i\}, X'_i := \emptyset$ .

#### I. Công đoạn tiền xử lý

1. Tìm tập  $m$  điểm  $X_I := \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}\} \subset X \setminus \{x_i\}$  gần  $x_i$ .

2. Với mỗi  $x_j^{(i)} \in X_I$ , nếu đoạn thẳng  $(x_i, x_j^{(i)}) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , thì  $X_I = X_I \setminus \{x_j^{(i)}\} \cup \{x_j^{\prime(i)}\}$ , trong đó  $x_j^{\prime(i)}$  là  $(x_i, x_j^{(i)}) \cap \partial\Omega$  và gần  $x_i$  nhất.  $X'_i := X'_i \cup \{x_j^{\prime(i)}\}$ .

3. Tính  $d_i := \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \|x_i - x_j^{(i)}\|$ ,  $x_j^{(i)} \in X_I$  thỏa mãn

$$\|x_i - x_1^{(i)}\| \leq \|x_i - x_2^{(i)}\| \leq \dots \leq \|x_i - x_6^{(i)}\|.$$

4. Khi  $n \leq \#X_I$

a) Tính  $d_{\text{im}} := \min\{\|x_n^{(i)} - x_l^{(i)}\| : x_l^{(i)} \in X_I \setminus \{x_i, x_n^{(i)}\}\}$

b) Nếu  $d_{\text{im}} \leq \gamma \cdot d_i$  hoặc  $\|x_i - x_n^{(i)}\| \geq \rho \cdot d_i$  thì

$$X_I := X_I \setminus \{x_n^{(i)}\}.$$

## II. Công đoạn chọn tập tâm hỗ trợ $X_i$

1. Phân hoạch tập điểm  $X_I = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots\}$  vào 16 góc khối  $O_j = \{x_{j1}^{(i)}, x_{j2}^{(i)}, \dots\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 16$ , ứng với Bảng 1, sao cho

$$\|x_i - x_{j1}^{(i)}\| \leq \|x_i - x_{j2}^{(i)}\| \leq \dots$$

2. Với  $j = 1, 2, \dots, 16$ .

Nếu  $\#O_j \geq 1$  thì  $X_i := X_i \cup \{x_{j1}^{(i)}\}$ .

Sau khi kết thúc thuật toán với mọi  $x_i \in X_{\text{int}}$ , ta cập nhật tập  $X$  bởi công thức

$$X := X \cup \bigcup_{x_i \in X_{\text{int}}} X'_i. \quad (3.1)$$

Trong thử nghiệm số, các tham số được chọn là  $m = 99$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\rho = 10$ .

Bước I.2 của thuật toán kiểm tra và thay thế điểm  $x_j^{(i)}$  bởi điểm  $x_j^{\prime(i)}$  trên biên gần tâm  $x_i$  nhất nếu điểm này nằm ngoài miền địa phương. Trong trường hợp phải thay thế sẽ xuất hiện thêm điểm  $x_j^{\prime(i)}$  nằm trên biên, nên sau khi kết thúc thuật toán ta phải cập nhật lại tập các tâm rời rạc  $X$  bởi công thức (3.1).

Bước I.3 của thuật toán là tính khoảng cách trung bình của 6 điểm gần nhất, sử dụng giá trị

này để loại đi các điểm quá gần nhau hoặc quá xa tâm  $x_i$  trong bước I.4 (loại đi các điểm tối). Sau khi loại đi điểm tối, số tâm còn lại sẽ được phân hoạch vào 16-góc khối và thuật toán kết thúc tại bước I.2 khi chọn một điểm gần nhất trên mỗi góc khối, khi đó tập  $X_i$  nhiều nhất có 16 điểm (nếu tất cả các góc khối đều chứa ít nhất một điểm), thông thường là nhỏ hơn 16.

## 4. Thử nghiệm số

Tương tự trong [1], [2], để đánh giá độ chính xác của các nghiệm chúng tôi sử dụng sai số trung bình bình phương tương đối được tính bởi công thức

$$\text{RRMS} := \sqrt{\frac{\sum_{x_i \in X_{\text{int}}} [\hat{u}(x_i) - u(x_i)]^2}{\sum_{x_i \in X_{\text{int}}} [u(x_i)]^2}}, \quad (4.1)$$

trong đó  $\hat{u}$  là nghiệm xấp xỉ của nghiệm giải tích  $u$ . Để tính véc tơ trọng số, chúng tôi cũng sử dụng hàm cơ sở bán kính RBF là hàm Power  $\phi(r) := r^5$ .

Trong thử nghiệm số, chúng tôi sẽ so sánh sai số RRMS của phương pháp RBF-FD sử dụng thuật toán cải tiến (RBF-FD I) với kết quả sử dụng thuật toán 16-góc khối (RBF-FD O) (Thuật toán 2, [1]), cùng với kết quả của phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) và phương pháp RBF-FD sử dụng cấu trúc điểm của phần tử hữu hạn (RBF-FD T). Với mỗi  $x_i \in X_{\text{int}}$ , RBF-FD T là phương pháp lựa chọn tập  $X_i$  là tập hợp tất cả các đỉnh của khối đa diện có một đỉnh là  $x_i$ . Để thực hiện được việc so sánh này, chúng tôi cũng sử dụng cách rời rạc miền  $\Omega$  của bài toán bởi PDE Toolbox MATLAB như trong [1], [2].

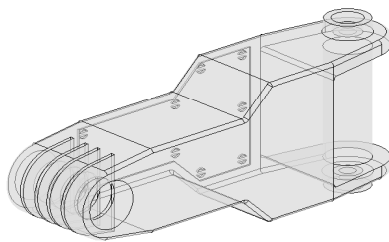
**Bài toán:** [[11, Section 3], Forearm Link]

Xét phương trình Poisson  $\Delta u = -10$  trên miền  $\Omega$  trong Hình 1(a) với điều kiện biên Dirichlet đồng nhất  $u = 0$  trên  $\partial\Omega$ .

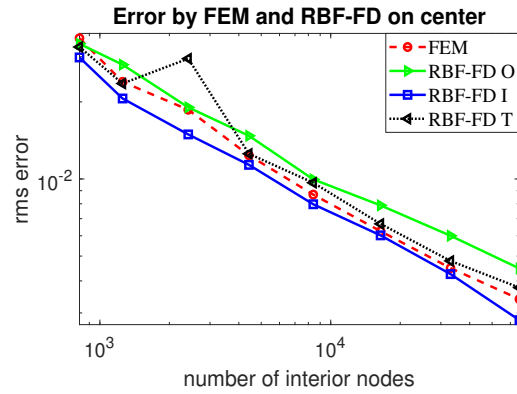
Miền  $\Omega$  của bài toán là một chi tiết máy công nghiệp được xuất từ file 'ForearmLink.stl' trong Matlab, có kích thước dài×rộng×cao là 135×35×61cm.

**Bảng 2.** Kết quả sai số RRMS trên các tâm và trên lưới của bài toán.

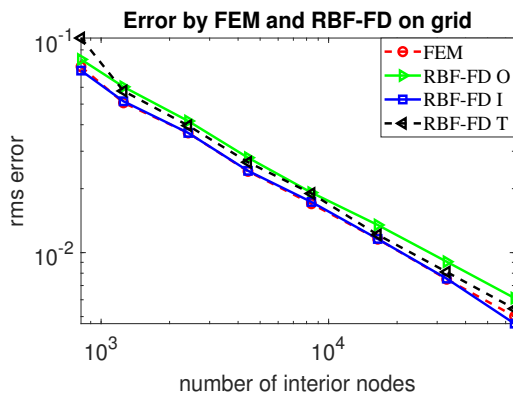
# $X_{int}$	Sai số RRMS trên các tâm				Sai số RRMS trên lưới			
	FEM	RBF-FD O	RBF-FD I	RBF-FD T	FEM	RBF-FD O	RBF-FD I	RBF-FD T
816	3,54e-02	3,37e-02	2,98e-02	3,28e-02	7,50e-02	8,12e-02	7,19e-02	1,02e-01
1254	2,39e-02	2,79e-02	2,06e-02	2,36e-02	5,07e-02	6,03e-02	5,16e-02	5,77e-02
2414	1,86e-02	1,90e-02	1,49e-02	2,95e-02	3,66e-02	4,16e-02	3,66e-02	3,96e-02
4423	1,24e-02	1,47e-02	1,14e-02	1,25e-02	2,41e-02	2,80e-02	2,43e-02	2,66e-02
8401	8,69e-03	9,97e-03	7,97e-03	9,67e-03	1,70e-02	1,92e-02	1,73e-02	1,90e-02
16437	6,25e-03	7,89e-03	6,02e-03	6,68e-03	1,16e-02	1,35e-02	1,16e-02	1,21e-02
33030	4,49e-03	6,00e-03	4,25e-03	4,79e-03	7,50e-03	9,06e-03	7,55e-03	8,11e-03
65652	3,40e-03	4,47e-03	2,81e-03	3,76e-03	5,02e-03	6,11e-03	4,63e-03	5,45e-03



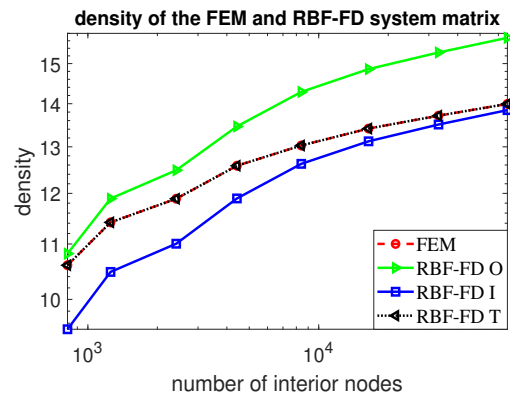
(a) Miền  $\Omega$



(b) Sai số trên tâm

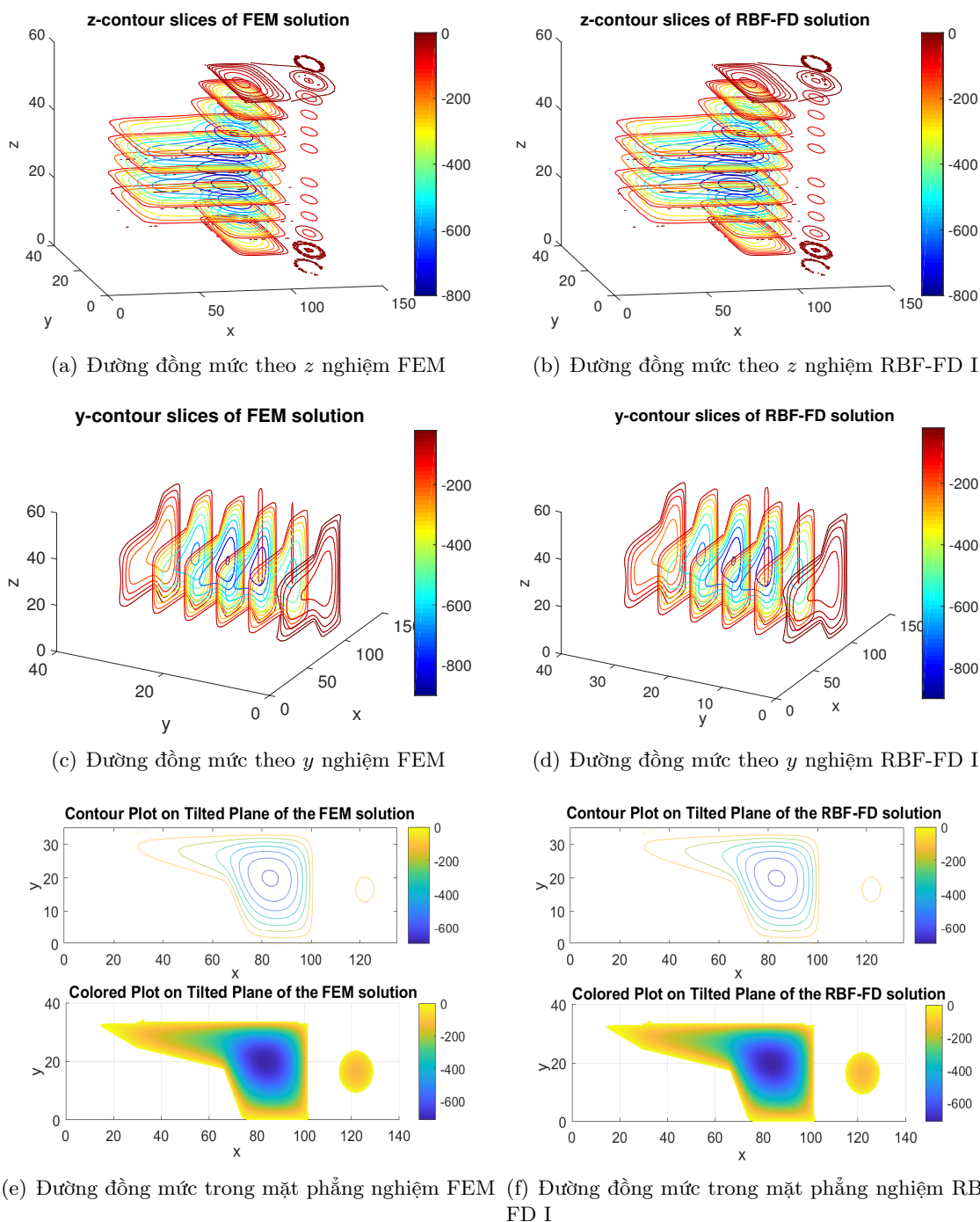


(c) Sai số trên lưới



(d) Mật độ của ma trận

**Hình 1.** Kết quả thử nghiệm số của bài toán: (a) Miền  $\Omega$  được tạo bởi MATLAB PDE Toolbox. (b)–(c) Đồ thị sai số RRMS trên tâm và trên lưới đều của các nghiệm như trong Bảng 2. (d) Mật độ ma trận cứng của FEM và mật độ ma trận hệ số của RBF-FD O, RBF-FD I, RBF-FD T.



**Hình 2.** Đồ thị đường đồng mức theo các biến của các nghiệm: Đường đồng mức nghiệm của FEM (bên trái) và đường đồng mức nghiệm của RBF-FD I (bên phải), trên miền rời rạc có 65652 tâm ở trong miền.

Do bài toán không có nghiệm giải tích, nên khi tính sai số RRMS bằng công thức (4.1) chúng tôi sử dụng nghiệm tham chiếu được giới thiệu trong [1] thay cho nghiệm  $u$ , đồng thời so sánh giá trị RRMS của các phương pháp trên các tâm của miền rời rạc  $X \subseteq \Omega$  và trên lưới.

Kết quả thử nghiệm số của bài toán được biểu diễn trong Bảng 2, Hình 1 và Hình 2. Cột 2–5 của Bảng 2 và Hình 1(b) biểu diễn sai số RRMS trên các tâm trong miền  $X \subseteq \Omega$ , ký hiệu là  $\#X_{\text{int}}$ , ứng với cột 1 của Bảng 2. Từ kết quả này ta thấy, sai số RRMS của RBF-FD I nhỏ hơn của RBF-FD T, nhỏ hơn của FEM và nhỏ hơn từ 1,3 lần đến 1,6 lần sai số RRMS của RBF-FD O. Từ Cột 6–9 của Bảng 2 và Hình 1(c) cũng cho thấy, sai số RRMS trên lưới đều, với bước lưới 0,4, đạt 1984548 nút lưới, của RBF-FD I nhỏ hơn từ 1,1 lần đến 1,3 lần sai số RRMS của RBF-FD O, nhỏ hơn của FEM và RBF-FD T.

Hơn nữa Hình 1(d) cho thấy mật độ của ma trận hệ số của RBF-FD O là lớn nhất, xấp xỉ 16, trong khi mật độ ma trận hệ số của RBF-FD I xấp xỉ 14, nhỏ hơn mật độ ma trận cứng của FEM, đó cũng là mật độ ma trận hệ số của RBF-FD T. Đặc biệt, nghiệm của phương pháp RBF-FD I và nghiệm của FEM hoàn toàn giống nhau khi vẽ các đường đồng mức và bảng màu giá trị của các nghiệm FEM, RBF-FD I trên miền rời rạc với  $X_{\text{int}}$  có 65652 điểm, theo các biến  $z, y$  và trong mặt phẳng ở Hình 2.

## 5. Kết luận

Kết quả thử nghiệm số cho thấy nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng thuật toán cải tiến giải phương trình Poisson với điều kiện biên Dirichlet trên miền hình học phức tạp trong không gian 3 chiều, có độ chính xác tốt so với phương pháp phần tử hữu hạn cả trên tâm và trên lưới đều, với mật độ ma trận hệ số thấp.

## Lời cảm ơn

Bài báo được tài trợ bởi Đề tài cấp cơ sở, mã số T2020-07-20 của Trường Đại học Công nghệ thông tin và truyền thông - Đại học Thái Nguyên.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. O. Davydov, T. O. Dang, and M. T. Ngo, "Octant-based stencil selection for meshless finite difference methods in 3D," *Vietnam Journal of Mathematics*, vol. 48, pp. 93-106, 2020.
- [2]. M. T. Ngo, T. T. G. Nguyen, and T. N. Nguyen, "The RBF-FD Method to solve the Poisson equation in 3d with the k-nearest points," (in Vietnamese), *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 204, no. 11, Natural Sciences - Engineering - Technology, pp. 9-15, 2019.
- [3]. A. I. Tolstykh and D. A. Shirobokov, "On using radial basis functions in a 'finite difference mode' with applications to elasticity problems," *Computational Mechanics*, vol. 33, no. 1, pp. 68-79, 2003.
- [4]. G. B. Wright and B. Fornberg, "Scattered node compact finite difference-type formulas generated from radial basis functions," *Journal of Computational Physics*, vol. 212, no. 1, pp. 99-123, 2006.
- [5]. O. Davydov and T. O. Dang, "Adaptive meshless centres and RBF stencils for Poisson equation," *Journal of Computational Physics*, vol. 230, pp. 287-304, 2011.
- [6]. O. Davydov and T. O. Dang, "On the optimal shape parameter for Gaussian Radial Basis Function finite difference approximation of Poisson equation," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 62, pp. 2143-2161, 2011.
- [7]. T. O. Dang, O. Davydov, and X. P. Hoang, "Adaptive RBF-FD method for elliptic problems with point Singularities in 2d," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 313, pp. 474-497, 2017.
- [8]. G. F. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 2007.
- [9]. M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2003.
- [10]. H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, 2005.
- [11]. The MathWorks, *Partial Differential Equation Toolbox™ User's Guide*, Inc, 2009.