SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP BA BƯỚC ĐẾN ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA BA ÁNH XẠ G-KHÔNG GIÃN TIỆM CẬN TRONG KHÔNG GIAN BANACH VỚI ĐỒ THỊ

CONVERGENCE OF A THREE-STEP ITERATION PROCESS TO COMMON FIXED POINTS OF THREE ASYMPTOTICALLY G-NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES WITH GRAPHS

Nguyễn Trung Hiếu, Cao Phạm Cẩm Tú

Trường Đại học Đồng Tháp; ngtrunghieu@dthu.edu.vn, caophamcamtu98@gmail.com

Tóm tắt - Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một dãy lặp ba bước mới cho ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị. Tiếp theo đó, chúng tôi chứng minh một số kết quả về sự hội tụ yếu và hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị. Các kết quả này là sự mở rộng của một số kết quả chính trong tài liệu tham khảo [1, 2]. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ để minh họa cho sự hội tụ của dãy được giới thiệu và cũng chứng tỏ rằng dãy lặp được giới thiệu hội tụ đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận nhanh hơn những dãy lặp được nghiên cứu trong bài báo [1, 2].

Từ khóa - ánh xạ G-không giãn tiệm cận; điểm bất động chung; không gian Banach với đồ thị

Abstract - In this paper, we introduce a new three step iteration scheme for three asymptotically G-nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces with graphs. We also prove some weak convergence and strong convergence results to common fixed points of three asymptotically G-nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces with graphs. These results are the extensions of some results in existing results in the literature [1, 2]. In addition, we give an example to illustrate the convergence of the introduced iteration process and also show that the convergence of the introduced iteration process to common fixed points of three asymptotically G-nonexpansive mappings is faster than the iteration processes in [1, 2]

Key words - asymptotically G-nonexpansive mapping; common fixed point; Banach spaces with graph

1. Giới thiệu

Ánh xạ không giãn tiệm cận được Goebel và Kirk giới thiệu năm 1972 và là một mở rộng của ánh xạ không giãn. Lớp ánh xạ không giãn tiệm cận được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu theo hướng thiết lập điều kiện tồn tại điểm bất động cũng như chứng minh sự hội tụ của những dãy lặp khác nhau đến điểm bất động. Bên cạnh đó, một số tác giả cũng quan tâm nghiên cứu mở rộng ánh xạ không giãn tiệm cận theo nhiều cách tiếp cận khác nhau. Năm 2018, sử dụng ý tưởng được trình bày bởi Jachymski trong bài báo [3] là kết hợp giữa lí thuyết điểm bất động và lí thuyết đồ thị, Sangago và các cộng sự [4] đã giới thiệu lớp ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị, đồng thời một số tính chất về điểm bất động và kết quả hội tụ cho lớp ánh xạ này cũng được thiết lập. Kể từ đó, việc thiết lập sự hội tụ của những dãy lặp khác nhau đến điểm bất động chung của những ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị được một số tác giả quan tâm. Năm 2018, sử dụng dãy lặp Ishikawa, Wattanataweekul [1] đã giới thiệu dãy lặp hai bước và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung của hai ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị. Năm 2019, sử dụng ý tưởng dãy SP-lặp, Wattanataweekul [2] đã giới thiệu dãy lặp ba bước cho ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận như sau:

$$u_1 \in C, \begin{cases} w_n = (1-c_n)u_n + c_n H^n u_n \\ v_n = (1-b_n)w_n + b_n S^n w_n \\ u_{n+1} = (1-a_n)v_n + a_n T^n v_n \end{cases} \tag{1.1}$$

với $n \in \mathbb{N}^*$, $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \subset [0,1]$, C là tập lồi trong không gian Banach X và $H, T, S : C \to C$ là ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận, đồng thời một số kết quả hội tụ của dãy lặp (1.1) cũng được thiết lập. Đến đây, một vấn đề tự nhiên được đặt ra là tiếp tục xây dựng những dãy lặp hội tụ đến điểm bất động chung nhanh hơn dãy lặp đã có. Do đó, trong bài báo này, từ dãy lặp (1.1), nhóm tác giả cũng đề xuất một dãy lặp ba bước mới cho ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận và chứng minh một số kết quả về hội tụ của dãy lặp được đề xuất đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị.

2. Một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo

Cho C là một tập con khác rỗng của không gian Banach thực X. Kí hiệu $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng với $V(G)$ tập hợp các đỉnh của đồ thị G sao cho $V(G)$ trùng với C, $E(G)$ tập hợp các cạnh của đồ thị G mà $(u,u) \in E(G)$ với $u \in C$ và G không có cạnh song song.

Định nghĩa 2.1. [5, Definition 4] Cho $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng. Khi đó, G được gọi là có *tính bắc cầu* nếu với $u, v, w \in V(G)$ sao cho $(u,v), (v,w) \in E(G)$ thì $(u,w) \in E(G)$.

Định nghĩa 2.2. [4, Definition 3.1] Cho X là không gian Banach thực và C là tập khác rỗng của X, $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng sao cho $V(G) = C$. Khi đó, ánh xạ $T : C \to C$ được gọi là *G-không giãn tiệm cận* nếu:

(1) T bảo toàn cạnh của G, tức là với $(u,v) \in E(G)$ ta có $(Tu, Tv) \in E(G)$.

(2) Tồn tại dãy $\{\lambda_n\}, \lambda_n \geq 1$ với $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$ sao cho $\| T^n u - T^n v \| \leq \lambda_n \| u - v \|$ với $(u,v) \in E(G)$ và $n \geq 1$.

Định nghĩa 2.3. [4, Definition 1.3] Cho X là không gian định chuẩn, C là tập con khác rỗng của X, $G=(V(G),E(G))$ là đồ thị định hướng sao cho $V(G)=C$. Khi đó, C được gọi là có *tính chất G* nếu với $\{u_n\}$ là dãy trong C sao cho $(u_n,u_{n+1})\in E(G)$ với $n\in\mathbb{N}^*$ và $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $u\in C$ thì tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $(u_{n(k)},u)\in E(G)$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 2.4. [5, Definition 6] Cho X là không gian Banach. Khi đó X được gọi là *thỏa mãn điều kiện Opial* nếu với $\{u_n\}$ là dãy trong X và $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến u ta có $\limsup\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|<\limsup\limits_{n\to\infty}\|u_n-v\|$ với $v\in X, u\neq v$.

Bổ đề 2.5. [4, Definition 1.4] *Cho X là không gian Banach, C là tập con khác rỗng của X, C có tính chất G, $T:C\to C$ là ánh xạ G-không giãn tiệm cận với dãy hệ số $\{\lambda_n\}$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-1)<\infty$. $\{u_n\}$ là dãy hội tụ đến $u\in C$, $(u_n,u_{n+1})\in E(G)$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tu_n-u_n\|=0$. Khi đó $Tu=u$.*

Bổ đề 2.6. [5, Lemma 3] *Giả sử*

(1) X là không gian Banach thỏa mãn điều kiện Opial.

(2) $\{u_n\}$ là dãy trong X sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-v\|$ tồn tại với $u,v\in X$.

(3) $\{u_{n(k)}\}$ và $\{v_{n(k)}\}$ là dãy con của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ yếu đến u, $\{v_{n(k)}\}$ hội tụ yếu đến v.

Khi đó $u=v$.

Định nghĩa 2.7. [3, Definition 2.3] Cho ánh xạ $T:X\to X$. Khi đó T được gọi là *G-liên tục* nếu $\{u_n\}$ là dãy trong X sao cho u_n hội tụ đến u và $(u_n,u_{n+1})\in E(G)$ thì $Tu_n\to Tu$.

Mệnh đề 2.8. [1, Proposition 3.2] *Giả sử*

(1) X là không gian Banach với đồ thị định hướng G, C có tính chất G.

(2) $T:C\to C$ là ánh xạ G-không giãn tiệm cận.

Khi đó T là G-liên tục.

Lưu ý rằng, trong những kết quả của [1, 2], các tác giả xét đồ thị $G=(V(G),E(G))$ sao cho $(u,u)\in E(G)$ với $u\in C$ và $E(G)$ là tập lồi, tức là $t(x,y)+(1-t)(u,v)\in E(G)$ với mọi $(x,y),(u,v)\in E(G)$ và $t\in[0,1]$. Tuy nhiên, tập $E(G)$ trong ([1], Example 4.5]) và ([2], Example 4.5]) không thoa mãn điều kiện $(u,u)\in E(G)$ với $u\in C$.

Định nghĩa 2.9. [6, Definition 3.1] Cho X là không gian vectơ và $G=(V(G),E(G))$ là đồ thị định hướng sao cho $E(G)\subset X\times X$. Khi đó $E(G)$ được gọi là *lồi theo tọa độ* nếu với $(p,u),(p,v),(u,p),(v,p)\in E(G)$ và $t\in[0,1]$ thì

$$t(p,u)+(1-t)(p,v)\in E(G) \text{ và } t(u,p)+(1-t)(v,p)\in E(G).$$

Từ Định nghĩa 2.9 ta nhận thấy, nếu $E(G)$ là tập lồi thì $E(G)$ là tập lồi theo tọa độ. Đồng thời, trong [6], các tác giả cũng chỉ ra tồn tại tập $E(G)$ lồi theo tọa độ nhưng không là tập lồi (xem Ví dụ 3.5 trong Mục 3).

Định nghĩa 2.10. [7, tr.534] Cho ánh xạ $T:C\to C$. Khi đó T được gọi là *G-nửa compact* nếu với $\{u_n\}$ là dãy trong C với $(u_n,u_{n+1})\in E(G)$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tu_n-u_n\|=0$ thì tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ đến $q\in C$ khi $k\to\infty$.

Bổ đề 2.11. [8, Lemma 2.4] *Cho X là không gian Banach lồi đều và $r>0$. Khi đó, tồn tại một hàm lồi, tăng ngặt và liên tục $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ sao cho $\varphi(0)=0$ và*

$\|tu+(1-t)v\|^2\le t\|u\|^2+(1-t)\|v\|^2-t(1-t)\varphi(\|u-v\|)$

với mọi $t\in[0,1]$ và $u,v\in B_r=\{u\in X:\|u\|\le r\}$.

Bổ đề 2.12. [9, Lemma 1] *Cho $\{a_n\},\{b_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là dãy số thực không âm thỏa mãn*

$$a_{n+1}\le(1+\gamma_n)a_n+b_n \ \forall n\ge 1$$

với $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ tồn tại.

3. Kết quả chính

Trong mục này, ta luôn xét $G=(V(G),E(G))$ là đồ thị định hướng, có tính chất bắc cầu với $V(G)=C$, $E(G)$ là tập lồi theo tọa độ và giả sử $T,S,H:C\to C$ là ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận với ba dãy hệ số tiệm cận lần lượt là $\{\sigma_n\},\{\kappa_n\},\{\varsigma_n\}$ sao cho $F(T)\cap F(S)\cap F(H)\neq\varnothing$, trong đó $F(T),F(S),F(H)$ lần lượt là tập điểm bất động của ba ánh xạ T,S,H. Đặt $\lambda_n=\max\{\sigma_n,\kappa_n,\varsigma_n\}$. Giả sử

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-1)<\infty.$$

Bằng việc mở rộng dãy lặp (1.1), nhóm tác giả giới thiệu dãy lặp $\{u_n\}$ cho ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị như sau:

$$u_1\in C,\ \begin{cases} w_n=(1-c_n)u_n+c_nH^nu_n \\ v_n=(1-b_n)H^nw_n+b_nS^nw_n \quad n\in\mathbb{N}^* \\ u_{n+1}=(1-a_n)S^nv_n+a_nT^nv_n, \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó, $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\subset[0,1]$. Trước hết, nhóm tác giả chứng minh một số tính chất của dãy lặp (3.1).

Mệnh đề 3.1. Giả sử

(1) X là không gian định chuẩn.

(2) C là tập con lồi, khác rỗng trong X.

(3) Với mỗi $p\in F(T)\cap F(S)\cap F(H)$, $\{u_n\}$ là dãy được xác định bởi (3.1) thỏa mãn $(u_1,p),(p,u_1)\in E(G)$.

Khi đó với $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $(u_n,p),(v_n,p),(w_n,p),(p,u_n)$, $(p,v_n),(p,w_n),(v_n,u_n),(w_n,u_n),(u_n,u_{n+1})\in E(G)$.

Chứng minh. Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh $(u_n,p)\in E(G)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. (3.2)

Theo giả thiết, ta có $(u_1, p) \in E(G)$. Suy ra (3.2) đúng với $n = 1$.

Giả sử (3.2) đúng với $n = k \geq 1$, tức là $(u_k, p) \in E(G)$. Ta cần chứng minh $(u_{k+1}, p) \in E(G)$.

Vì T, S, H bảo toàn cạnh nên T^k, S^k, H^k bảo toàn cạnh. Kết hợp H^k bao toàn cạnh và $(u_k, p) \in E(G)$, ta được $(H^k u_k, p) \in E(G)$. Ta lại có

$$\begin{aligned}(w_k, p) &= ((1-c_k)u_k + c_k H^k u_k, p)\\ &= (1-c_k)(u_k, p) + c_k(H^k u_k, p).\end{aligned} \quad (3.3)$$

Do $(u_k, p), (H^k u_k, p) \in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ nên từ (3.3), ta có $(w_k, p) \in E(G)$. Kết hợp H^k, S^k bảo toàn cạnh với $(w_k, p) \in E(G)$, ta được $(H^k w_k, p), (S^k w_k, p) \in E(G)$. Ta cũng có

$$\begin{aligned}(v_k, p) &= ((1-b_k)H^k w_k + b_k S^k w_k, p)\\ &= (1-b_k)(H^k w_k, p) + b_k(S^k w_k, p).\end{aligned} \quad (3.4)$$

Khi đó, từ (3.4), $(H^k w_k, p), (S^k w_k, p) \in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ, ta có $(v_k, p) \in E(G)$. Kết hợp điều này với S^k, T^k bảo toàn cạnh, ta được $(S^k v_k, p), (T^k v_k, p) \in E(G)$. Ta có

$$\begin{aligned}(u_{k+1}, p) &= ((1-a_k)S^k v_k + a_k T^k v_k, p)\\ &= (1-a_k)(S^k v_k, p) + a_k(T^k v_k, p).\end{aligned} \quad (3.5)$$

Vì $(S^k v_k, p), (T^k v_k, p) \in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ nên từ (3.5), ta có $(u_{k+1}, p) \in E(G)$. Do đó, theo nguyên lí quy nạp, ta có $(u_n, p) \in E(G)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tiếp theo, sử dụng kết qua H^n bảo toàn cạnh và $(u_n, p) \in E(G)$, ta được $(H^n u_n, p) \in E(G)$. Ta có:

$$\begin{aligned}(w_n, p) &= ((1-c_n)u_n + c_n H^n u_n, p)\\ &= (1-c_n)(u_n, p) + c_n(H^n u_n, p).\end{aligned} \quad (3.6)$$

Kết hợp (3.6) với $(u_n, p), (H^n u_n, p) \in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ, ta có $(w_n, p) \in E(G)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Do H^n, S^n bảo toàn cạnh và $(w_n, p) \in E(G)$ nên $(H^n w_n, p), (S^n w_n, p) \in E(G)$. Ta có:

$$\begin{aligned}(v_n, p) &= ((1-b_n)H^n w_n + b_n S^n w_n, p)\\ &= (1-b_n)(H^n w_n, p) + b_n(S^n w_n, p).\end{aligned} \quad (3.7)$$

Khi đó, từ (3.7), $(H^n w_n, p), (S^n w_n, p) \in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ, ta suy ra $(v_n, p) \in E(G)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lập luận tương tự như trên, ta chứng minh được

$$(p, u_n), (p, v_n), (p, w_n) \in E(G) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $(v_n, p), (p, u_n), (w_n, p), (p, u_n), (u_n, p), (p, u_{n+1}) \in E(G)$ và G có tính chất bắc cầu nên

$$(v_n, u_n), (w_n, u_n), (u_n, u_{n+1}) \in E(G) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Mệnh đề 3.2. *Giả sử*

(1) *X là không gian Banach lồi đều.*

(2) *C là tập con lồi, bị chặn, đóng, khác rỗng trong X.*

(3) *Với mỗi $p \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$, $\{u_n\}$ là dãy được xác định bởi (3.1) thỏa mãn $(u_1, p), (p, u_1) \in E(G)$,*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n < 1, 0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$$

và $0 < \liminf_{n\to\infty} c_n \leq \limsup_{n\to\infty} c_n < 1$.

Khi đó

(1) $\lim_{n\to\infty} \| u_n - p \|$ *tồn tại.*

(2) $\lim_{n\to\infty} \| T^n v_n - S^n v_n \| = 0$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \| S^n w_n - H^n w_n \| = 0$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \| H^n u_n - u_n \| = 0$.

(5) $\lim_{n\to\infty} \| Tu_n - u_n \| = \lim_{n\to\infty} \| Su_n - u_n \| = \lim_{n\to\infty} \| Hu_n - u_n \| = 0$.

Chứng minh (1). Với $p \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$, theo Mệnh đề 3.1, ta có

$$(u_n, p), (v_n, p), (w_n, p), (v_n, u_n), (w_n, u_n), (u_n, u_{n+1}) \in E(G).$$

Vì C là tập bị chặn nên tồn tại $r > 0$ sao cho $\| u \| \leq r$ với mọi $u \in C$. Khi đó $u_n, v_n, w_n \in B_r = \{u \in C : \| u \| \leq r\}$. Do đó, theo Bổ đề 2.11, tồn tại hàm lồi, tăng ngặt, liên tục $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sao cho $\varphi(0) = 0$ và

$$\begin{aligned}\| w_n - p \|^2 &= \| (1-c_n)(u_n - p) + c_n(H^n u_n - p) \|^2\\ &\leq (1-c_n) \| u_n - p \|^2 + c_n \| H^n u_n - p \|^2\\ &\quad - c_n(1-c_n)\varphi(\| H^n u_n - u_n \|).\end{aligned} \quad (3.8)$$

Do S là G-không giãn tiệm cận nên từ (3.8) ta có

$$\begin{aligned}\| w_n - p \|^2 &\leq (1-c_n) \| u_n - p \|^2 + c_n \lambda_n^2 \| u_n - p \|^2\\ &\quad - c_n(1-c_n)\varphi(\| H^n u_n - u_n \|)\\ &= [1 + c_n(\lambda_n^2 - 1)] \| u_n - p \|^2 - c_n(1-c_n)\varphi(\| H^n u_n - u_n \|).\end{aligned} \quad (3.9)$$

Lập luận tương tự như trên, theo Bổ đề 2.11 và H, S là ánh xạ G-không giãn tiệm cận, kết hợp với (3.9), ta có

$$\begin{aligned}\| v_n - p \|^2 &\leq (1-b_n) \| H^n w_n - p \|^2 + b_n \| S^n w_n - p \|^2\\ &\quad - b_n(1-b_n)\varphi(\| S^n w_n - H^n w_n \|)\\ &\leq (1-b_n)\lambda_n^2 \| w_n - p \|^2 + b_n\lambda_n^2 \| w_n - p \|^2\\ &\quad - b_n(1-b_n)\varphi(\| S^n w_n - H^n w_n \|)\\ &= \lambda_n^2 \| w_n - p \|^2 - b_n(1-b_n)\varphi(\| S^n w_n - H^n w_n \|)\\ &\leq \lambda_n^2[1 + c_n(\lambda_n^2 - 1)] \| u_n - p \|^2\\ &\quad - c_n\lambda_n^2(1-c_n)\varphi(\| H^n u_n - u_n \|)\\ &\quad - b_n(1-b_n)\varphi(\| S^n w_n - H^n w_n \|).\end{aligned} \quad (3.10)$$

Tương tự, theo Bổ đề 2.11 và S, T là ánh xạ G-không giãn tiệm cận, kết hợp với (3.10), với lưu ý $\lambda_n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}\| u_{n+1} - p \|^2 &\leq (1-a_n) \| S^n v_n - p \|^2 + a_n \| T^n v_n - p \|^2\\ &\quad - a_n(1-a_n)\varphi(\| T^n v_n - S^n v_n \|)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le (1-a_n)\lambda_n^2\|v_n-p\|^2+a_n\lambda_n^2\|v_n-p\|^2\\
&\quad -a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)\\
&=\lambda_n^2\|v_n-p\|^2-a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)\\
&\le \lambda_n^4[1+c_n(\lambda_n^2-1)]\|u_n-p\|^2-\lambda_n^4c_n(1-c_n)\varphi(\|H^n u_n-u_n\|)\\
&\quad -\lambda_n^2 b_n(1-b_n)\varphi(\|S^n w_n-H^n w_n\|)-a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)\\
&=[1+(\lambda_n^2-1)(\lambda_n^2+1+\lambda_n^4c_n)]\|u_n-p\|^2\\
&\quad -\lambda_n^4c_n(1-c_n)\varphi(\|H^n u_n-u_n\|)-\lambda_n^2b_n(1-b_n)\varphi(\|S^n w_n-H^n w_n\|)\\
&\quad -a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)\\
&\le \|u_n-p\|^2+(\lambda_n^2-1)(\lambda_n^2+1+\lambda_n^4c_n)\|u_n-p\|^2\\
&\quad -c_n(1-c_n)\varphi(\|H^n u_n-u_n\|)-b_n(1-b_n)\varphi(\|S^n w_n-H^n w_n\|)\\
&\quad -a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Vì $\{c_n\}$, $\{\lambda_n\}$ và C bị chặn nên tồn tại hằng số $M>0$ sao cho $(\lambda_n^2+1+\lambda_n^4c_n)\|u_n-p\|^2\le M$ với $n\ge 1$. Khi đó, từ (3.11), ta được

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}-p\|^2&\le\|u_n-p\|^2+M(\lambda_n^2-1)-c_n(1-c_n)\varphi(\|H^n u_n-u_n\|)\\
&\quad -b_n(1-b_n)\varphi(\|S^n w_n-H^n w_n\|)\\
&\quad -a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Từ (3.12), ta có $\|u_{n+1}-p\|^2\le\|u_n-p\|^2+M(\lambda_n^2-1)$. Vì $0\le\lambda_n^2-1\le 2\lambda_n(\lambda_n-1)$ với $\lambda_n\ge 1$ và $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-1)<\infty$ nên $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^2-1)<\infty$. Khi đó, theo Bổ đề 2.12, ta suy ra giới hạn $\lim_{n\to\infty}\|u_n-p\|$ tồn tại.

(2). Từ (3.12), ta có

$$\|u_{n+1}-p\|^2\le\|u_n-p\|^2+M(\lambda_n^2-1)-a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|).$$

Do đó

$$a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)\le\|u_n-p\|^2-\|u_{n+1}-p\|^2+M(\lambda_n^2-1). \qquad (3.13)$$

Vì $0<\liminf_{n\to\infty}a_n\le\limsup_{n\to\infty}a_n<1$ nên tồn tại số thực $\gamma>0$ và số tự nhiên n_0 sao cho $a_n(1-a_n)\ge\gamma>0$ với $n\ge n_0$. Từ (3.13), với bất kì số tự nhiên $m\ge n_0$, ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{m}\gamma\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)&\le\sum_{n=n_0}^{m}a_n(1-a_n)\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)\\
&\le\sum_{n=n_0}^{m}\|u_n-p\|^2-\sum_{n=n_0}^{m}\|u_{n+1}-p\|^2+M\sum_{n=n_0}^{m}(\lambda_n^2-1)\\
&=\|u_{n_0}-p\|^2-\|u_{m+1}-p\|^2+M\sum_{n=n_0}^{m}(\lambda_n^2-1)\\
&\le\|u_{n_0}-p\|^2+M\sum_{n=n_0}^{m}(\lambda_n^2-1). \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Kết hợp $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^2-1)<\infty$ với (3.14), ta suy ra

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\lambda\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)<\infty.$$

Do đó, $\lim_{n\to\infty}\varphi(\|T^n v_n-S^n v_n\|)=0$. Kết hợp với tính chất của φ, ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n v_n-S^n v_n\|=0. \qquad (3.15)$$

(3). Từ (3.12), ta cũng có

$$b_n(1-b_n)\varphi(\|S^n w_n-H^n w_n\|)\le\|u_n-p\|^2-\|u_{n+1}-p\|^2+M(\lambda_n^2-1). \qquad (3.16)$$

Tương tự như chứng minh (2), từ (3.16), ta suy ra $\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(\|S^n w_n-H^n w_n\|)<\infty$. Do đó,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(\|S^n w_n-H^n w_n\|)=0.$$

Sử dụng tính chất của φ, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|S^n w_n-H^n w_n\|=0. \qquad (3.17)$$

(4). Từ (3.12), ta có

$$c_n(1-c_n)\varphi(\|H^n u_n-u_n\|)\le\|u_n-p\|^2-\|u_{n+1}-p\|^2+M(\lambda_n^2-1). \qquad (3.18)$$

Lập luận tương tự như chứng minh (2), từ (3.18), ta được $\sum_{n=n_0}^{m}\varphi(\|H^n u_n-u_n\|)<\infty$. Do đó,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(\|H^n u_n-u_n\|)=0.$$

Kết hợp điều này với tính chất của φ, ta cũng có

$$\lim_{n\to\infty}\|H^n u_n-u_n\|=0. \qquad (3.19)$$

(5). Từ $w_n=(1-c_n)u_n+c_nH^nu_n$, ta có

$$\begin{aligned}
\|w_n-u_n\|&=\|(1-c_n)u_n+c_nH^nu_n-u_n\|\\
&=c_n\|H^nu_n-u_n\|. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Từ (3.19) và (3.20), ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-u_n\|=0. \qquad (3.21)$$

Từ $v_n=(1-b_n)H^nw_n+b_nS^nw_n$ và $(w_n,u_n)\in E(G)$, ta được

$$\begin{aligned}
\|v_n-u_n\|&=\|(1-b_n)H^nw_n+b_nS^nw_n-u_n\|\\
&\le\|H^nw_n-u_n\|+b_n\|S^nw_n-H^nw_n\|\\
&\le\|H^nw_n-H^nu_n\|+\|H^nu_n-u_n\|+b_n\|S^nw_n-H^nw_n\|\\
&\le\lambda_n\|w_n-u_n\|+\|H^nu_n-u_n\|+b_n\|S^nw_n-H^nw_n\|. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.17), (3.20), (3.21) và (3.22), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-u_n\|=0. \qquad (3.23)$$

Theo Mệnh đề 3.1, ta được $(w_n,u_n)\in E(G)$. Do đó

$$\begin{aligned}
&\|S^nu_n-u_n\|\\
&\le\|S^nu_n-S^nw_n\|+\|S^nw_n-H^nw_n\|+\|H^nw_n-H^nu_n\|+\|H^nu_n-u_n\|\\
&\le 2\lambda_n\|w_n-u_n\|+\|S^nw_n-H^nw_n\|+\|H^nu_n-u_n\|. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Từ (3.17), (3.20), (3.21) và (3.24), ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\|S^nu_n-u_n\|=0. \qquad (3.25)$$

Theo Mệnh đề 3.1, ta có $(v_n, u_n) \in E(G)$. Do đó

$$\| T^n u_n - u_n \|$$
$$\le \| T^n u_n - T^n v_n \| + \| T^n v_n - S^n v_n \| + \| S^n v_n - S^n u_n \| + \| S^n u_n - u_n \|$$
$$\le 2\lambda_n \| v_n - u_n \| + \| T^n v_n - S^n v_n \| + \| S^n u_n - u_n \|. \quad (3.26)$$

Kết hợp (3.15), (3.23), (3.25) với (3.26), ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n u_n - u_n \| = 0. \quad (3.27)$$

Vì $(v_n, u_n) \in E(G)$ nên

$$\| u_{n+1} - u_n \| = \| (1-a_n)S^n v_n + a_n T^n v_n - u_n \|$$
$$\le \| S^n v_n - u_n \| + a_n \| T^n v_n - S^n v_n \|$$
$$\le \| S^n v_n - S^n u_n \| + \| S^n u_n - u_n \| + a_n \| T^n v_n - S^n v_n \|$$
$$\le \lambda_n \| v_n - u_n \| + \| S^n u_n - u_n \| + a_n \| T^n v_n - S^n v_n \|. \quad (3.28)$$

Từ (3.28), (3.15), (3.23) và (3.25), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - u_n \| = 0. \quad (3.29)$$

Vì $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ nên

Ta có $\| u_{n+1} - T^n u_{n+1} \|$

$$\le \| u_{n+1} - u_n \| + \| T^n u_n - T^n u_{n+1} \| + \| T^n u_n - u_n \|$$
$$\le \| u_{n+1} - u_n \| + \lambda_n \| u_n - u_{n+1} \| + \| T^n u_n - u_n \|$$
$$= (1+\lambda_n) \| u_{n+1} - u_n \| + \| T^n u_n - u_n \|. \quad (3.30)$$

Kết hợp (3.30) với (3.27) và (3.29), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - T^n u_{n+1} \| = 0.$$

Ta lại có

$$\| u_{n+1} - T u_{n+1} \| \le \| u_{n+1} - T^{n+1} u_{n+1} \| + \| T u_{n+1} - T^{n+1} u_{n+1} \|$$
$$\le \| u_{n+1} - T^{n+1} u_{n+1} \| + \lambda_1 \| u_{n+1} - T^n u_{n+1} \|.$$

Khi $n \to \infty$, ta nhận được $\lim_{n\to\infty} \| T u_n - u_n \| = 0$. Ta có

$$\| u_{n+1} - S^n u_{n+1} \|$$
$$\le \| u_{n+1} - u_n \| + \| S^n u_n - S^n u_{n+1} \| + \| S^n u_n - u_n \|$$
$$\le \| u_{n+1} - u_n \| + \lambda_n \| u_n - u_{n+1} \| + \| S^n u_n - u_n \|$$
$$= (1+\lambda_n) \| u_{n+1} - u_n \| + \| S^n u_n - u_n \|. \quad (3.31)$$

Sử dụng (3.31), (3.25) và (3.29), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - S^n u_{n+1} \| = 0.$$

Ta có

$$\| u_{n+1} - S u_{n+1} \| \le \| u_{n+1} - S^{n+1} u_{n+1} \| + \| S u_{n+1} - S^{n+1} u_{n+1} \|$$
$$\le \| u_{n+1} - S^{n+1} u_{n+1} \| + \lambda_1 \| u_{n+1} - S^n u_{n+1} \|.$$

Cho $n \to \infty$, ta suy ra $\lim_{n\to\infty} \| S u_n - u_n \| = 0$. Tương tự

$$\| u_{n+1} - H^n u_{n+1} \|$$
$$\le \| u_{n+1} - u_n \| + \| H^n u_n - H^n u_{n+1} \| + \| H^n u_n - u_n \|$$
$$\le \| u_{n+1} - u_n \| + \lambda_n \| u_n - u_{n+1} \| + \| H^n u_n - u_n \|$$
$$= (1+\lambda_n) \| u_{n+1} - u_n \| + \| H^n u_n - u_n \|. \quad (3.32)$$

Từ (3.19), (3.29) và (3.32), ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - H^n u_{n+1} \| = 0.$$

Ta lại có

$$\| u_{n+1} - H u_{n+1} \|$$
$$\le \| u_{n+1} - H^{n+1} u_{n+1} \| + \| H u_{n+1} - H^{n+1} u_{n+1} \|$$
$$\le \| u_{n+1} - H^{n+1} u_{n+1} \| + \lambda_1 \| u_{n+1} - H^n u_{n+1} \|. \quad (3.33)$$

Cho $n \to \infty$ trong (3.33), ta được $\lim_{n\to\infty} \| H u_n - u_n \| = 0$.

Tiếp theo, chứng minh sự hội tụ yếu của dãy lặp (3.1) đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị.

Định lí 3.3. *Giả sử*

(1) X là không gian Banach lồi đều và thỏa mãn điều kiện Opial.

(2) C là tập con lồi, bị chặn, đóng, khác rỗng trong X và C có tính chất G.

(3) $\{u_n\}$ là dãy được xác định bởi (3.1) thỏa mãn $(u_1, p), (p, u_1) \in E(G)$ với mọi $p \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$.

$$0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n < 1, 0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1,$$
$$0 < \liminf_{n\to\infty} c_n \le \limsup_{n\to\infty} c_n < 1.$$

Khi đó $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến điểm bất động chung của T, S, H.

Chứng minh. Vì X là không gian Banach lồi đều nên X có tính chất phản xạ. Hơn nữa, từ Mệnh đề 3.2, ta có $\lim_{n\to\infty} \| u_n - p \|$ tồn tại. Vì vậy $\{u_n\}$ bị chặn. Do đó, tồn tại dãy con hội tụ yếu của $\{u_n\}$. Giả sử $\{u_{n(k)}\}, \{v_{n(k)}\}$ là hai dãy con cua $\{u_n\}$ lần lượt hội tụ yếu đến u, v. Theo Mệnh đề 3.2, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \| T u_{n(k)} - u_{n(k)} \| = \lim_{k\to\infty} \| S u_{n(k)} - u_{n(k)} \|$$
$$= \lim_{k\to\infty} \| H u_{n(k)} - u_{n(k)} \| = 0. \quad (3.34)$$

Do $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ và G có tính chất bắc cầu nên

$$(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}) \in E(G). \quad (3.35)$$

Do đó, từ (3.34) và (3.35), theo Bổ đề 2.5, ta được $Tu = Su = Hu = u$ hay $u \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$.

Tương tự như trên, ta chứng minh được $v \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$. Vì $u, v \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$ nên $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ và $\lim_{n\to\infty} \| u_n - v \|$ tồn tại. Theo Bổ đề 2.6, ta được $u = v$. Do đó, $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến điểm bất động chung trong $F(T) \cap F(S) \cap F(H)$.

Tiếp theo, nhóm tác giả chứng minh sự hội tụ cua dãy lặp (3.1) đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị.

Định lí 3.4. *Giả sử*

(1) X là không gian Banach lồi đều.

(2) C là tập con lồi, bị chặn, đóng, khác rỗng trong X, C có tính chất G.

(3) Một trong ba ánh xạ T, S, H là G-nửa compact.

(4) $\{u_n\}$ là dãy được xác định bởi (3.1) thỏa mãn $(u_1, p), (p, u_1) \in E(G)$ với mọi $p \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$.

$$0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n < 1, 0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1,$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} c_n \le \limsup_{n\to\infty} c_n < 1.$$

Khi đó $\{u_n\}$ hội tụ đến điểm bất động chung của T, S và H.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.2, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - Tu_n \| = \lim_{n\to\infty} \| u_n - Su_n \| = \lim_{n\to\infty} \| u_n - Hu_n \| = 0.$$

Hơn nữa, $\{u_n\}$ là dãy trong C và $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$. Kết hợp với giả thiết một trong ba ánh xạ T, S, H là G-nửa compact, ta suy ra tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ đến $q \in C$. Do đó,

$$\lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - Tu_{n(k)} \| = \lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - Su_{n(k)} \| = \lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - Hu_{n(k)} \| = 0.$$

Theo Mệnh đề 2.8, ta được T, S và H là G-liên tục. Kết hợp với (3.35), ta được

$$\lim_{k\to\infty} \| Tu_{n(k)} - Tq \| = \lim_{k\to\infty} \| Su_{n(k)} - Sq \| = \lim_{k\to\infty} \| Hu_{n(k)} - Hq \| = 0.$$

Ta có

$$\| q - Tq \| \le \| q - u_{n(k)} \| + \| u_{n(k)} - Tu_{n(k)} \| + \| Tu_{n(k)} - Tq \|.$$

$$\| q - Sq \| \le \| q - u_{n(k)} \| + \| u_{n(k)} - Su_{n(k)} \| + \| Su_{n(k)} - Sq \|.$$

$$\| q - Hq \| \le \| q - u_{n(k)} \| + \| u_{n(k)} - Hu_{n(k)} \| + \| Hu_{n(k)} - Hq \|.$$

Do đó $\lim_{k\to\infty} \| q - Tq \| = \lim_{k\to\infty} \| q - Sq \| = \lim_{k\to\infty} \| q - Hq \| = 0$.

Suy ra $Tq = Sq = Hq = q$ hay $q \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$.

Theo Mệnh đề 3.2, ta có $\lim_{n\to\infty} \| u_n - q \|$ tồn tại nên $\{u_n\}$ hội tụ đến $q \in F(T) \cap F(S) \cap F(H)$.

Cuối cùng, nhóm tác giả đưa ra ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp (3.1) đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận. Đồng thời, ví dụ này cũng chứng tỏ rằng dãy lặp (3.1) hội tụ đến điểm bất động chung nhanh hơn dãy lặp trong bài báo [1, 2].

Ví dụ 3.5. Cho $X = \mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn giá trị tuyệt đối, $C = [0, 2]$, $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng với $V(G) = C$ và $(x, y) \in E(G)$ khi và chỉ khi $0.50 < x \ne y < 1.70$ hoặc $x = y \in C$. Khi đó, $(u, u) \in E(G)$ với $u \in C$ và $E(G)$ là tập lồi theo tọa độ nhưng không là tập lồi. Xét ba ánh xạ T, S, H xác định bởi nếu

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{5}{8}\arcsin(x-1) + 1 & \text{khi } x \ne \sqrt{3} \\ 0 & \text{khi } x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\tan(x-1) + 1 & \text{khi } x \ne \sqrt{3} \\ 0 & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases} \text{ và}$$

$$Hx = \begin{cases} x^{1/x} & \text{khi } x \ne \sqrt{2} \\ 2 & \text{khi } x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Với $(x, y) \in E(G)$, ta có $0.50 < x, y < 1.70$. Suy ra, $(Tx, Ty), (Sx, Sy), (Hx, Hy) \in E(G)$. Suy ra S, T, H bảo toàn cạnh. Hơn nữa, với $(x, y) \in E(G)$ và $1 \le \lambda_n \le 1.36$ ta tính được $\| T^n x - T^n y \| \le \lambda_n \| x - y \|$, $\| S^n x - S^n y \| \le \lambda_n \| x - y \|$ và $\| H^n x - H^n y \| \le \lambda_n \| x - y \|$. Do đó, T, S, H là ánh xạ G-không giãn tiệm cận.

Ta có $F(T) \cap F(S) \cap F(H) = \{1\} \ne \varnothing$. Chọn $u_1 = 1.4$ ta có $(p, u_1), (u_1, p) \in E(G)$ với $p \in F$.

Chọn $a_n = \dfrac{n+1}{5n+3}$, $b_n = \dfrac{n+4}{10n+7}$, $c_n = \dfrac{n+2}{8n+5}$. Khi đó, dãy lặp $\{u_n\}$ xác định bởi (3.1) có dạng dưới đây hội tụ đến điểm bất động chung $p = 1$.

$$u_1 = 1.4 \text{ và } \begin{cases} w_n = \dfrac{7n+3}{8n+5} u_n + \dfrac{n+2}{8n+5} H^n u_n \\ v_n = \dfrac{9n+3}{10n+7} H^n w_n + \dfrac{n+4}{10n+7} S^n w_n \\ u_{n+1} = \dfrac{4n+2}{5n+3} S^n v_n + \dfrac{n+1}{5n+3} T^n v_n. \end{cases} \quad (3.36)$$

Tuy nhiên, với $x = t = \sqrt{3}, y = m = 1$ và $u = \sqrt{2}, v = 1$, ta được $| Tx - Ty | > \lambda_1 | x - y |, | St - Sm | > \lambda_1 | t - m |$ và

$$| Hu - Hv | > \lambda_1 | u - v |.$$

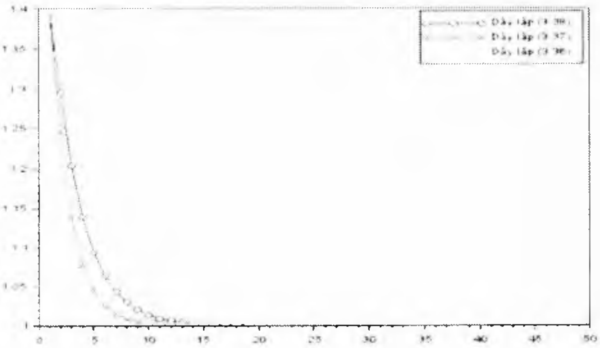
Do đó, S, T, H không là ánh xạ không giãn tiệm cận. Vì vậy, những kết quả về sự hội tụ đến điểm bất động chung của ba ánh xạ không giãn tiệm cận sẽ không áp dụng cho ba ánh xạ này.

Hơn nữa, với cách chọn ba ánh xạ T, S, H như trên thì các dãy lặp lần lượt trong [2] và [1] có dạng như sau cũng hội tụ đến điểm bất động chung $p = 1$.

$$x_1 = 1.4 \text{ và } \begin{cases} z_n = \dfrac{7n+3}{8n+5} x_n + \dfrac{n+2}{8n+5} H^n x_n \\ y_n = \dfrac{9n+3}{10n+7} z_n + \dfrac{n+4}{10n+7} S^n z_n \\ x_{n+1} = \dfrac{4n+2}{5n+3} y_n + \dfrac{n+1}{5n+3} T^n y_n \end{cases} \quad (3.37)$$

$$t_1 = 1.4 \text{ và } \begin{cases} m_n = \dfrac{9n+3}{10n+7} t_n + \dfrac{n+4}{10n+7} S^n t_n \\ t_{n+1} = \dfrac{4n+2}{5n+3} m_n + \dfrac{n+1}{5n+3} T^n m_n \end{cases} \quad (3.38)$$

Tuy nhiên, sự hội tụ của dãy lặp (3.36) đến điểm bất động chung nhanh hơn sự hội tụ của dãy lặp (3.37) và (3.38) và được minh họa bởi Bảng 1 và Hình 1.



***Hình 1.** Dáng điệu hội tụ của dãy lặp (3.36), (3.37) và (3.38) đến 1*

Bảng 1. *Số liệu hội tụ của dãy lặp (3.36), (3.37) và (3.38)*

n	t_n (dãy 3.38)	x_n (dãy 3.37)	u_n (dãy 3.36)
1	1.4	1.4	1.4
2	1.2943753	1.2460293	1.0389924
3	1.2035011	1.1378083	1.0001371
4	1.1385564	1.0776188	1.0000001
5	1.094045	1.0441347	1.
...	...	...	...
32	1.000006	1.0000001	1.
33	1.0000042	1.	1.
...	...	...	...
46	1.0000001	1.	1.
47	1.	1.	1.

4. Kết luận

Trong bài báo này, một dãy lặp cho ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận được đề xuất. Từ đó, một số kết quả về sự hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn trong không gian Banach lồi đều với đồ thị được thiết lập và chứng minh, trong đó giả thiết tập lồi của $E(G)$ trong các kết quả của [1, 2] được thay bởi giả thiết $E(G)$ là tập lồi theo tọa độ. Đồng thời, một ví dụ được đưa để chứng tỏ rằng dãy lặp được đề xuất hội tụ đến điểm bất động chung của ba ánh xạ G-không giãn tiệm cận nhanh hơn dãy lặp trong bài báo [1, 2].

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2019.02.15.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Wattanataweekul, "Approximating common fixed points for two G-asymptotically nonexpansive mappings with directed grahps", *Thai J. Math.*, 16(3), 2018, 817-830.

[2] R. Wattanataweekul, "Convergence theorems of the modified SP-iteration for G-asymptotically nonexpansive mappings with directed graphs", *Thai J. Math.*, 17(3), 2019, 805-820.

[3] J. Jachymski, "The contraction principle for mappings on a metric space with a graph", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(4), 2008, 1359-1373.

[4] M. G. Sangago, T. W. Hunde and H. Z. Hailu, "Demiclodeness and fixed points of G-asymptotically nonexpansive mapping in Banach spaces with graph", *Fixed Point Theory*, 8(3), 2018, 313-340.

[5] R. Suparatulatorn, W. Cholamjiak, S. Suantai, "A modified S-iteration process for G-nonexpansive mappings in Banach spaces with graphs", *Numer. Algor.*, 77(2), 2018, 479-490.

[6] N. V. Dung and N. T. Hieu, "Convergence of a new three-step iteration process to common fixed points of three G-nonexpansive mappings in Banach spaces with directed graphs", *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, 24 pages, accepted paper.

[7] N. Shahzad and R. Al-Dubiban, "Approximating common fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces", *Georgian Math. J.*, 13(3), 2006, 529-537.

[8] N. V. Dung and N. T. Hieu, "A new hybrid projection algorithm for equilibrium problems and asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces", *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, 113(3), 2019, 2017-2035.

[9] K. K. Tan, H. K. Xu, "Approximating fixed points of nonexpansive mapping by the Ishikawa iteration process", *J. Math. Anal. Appl.*, 178, 1993, 301-308.

(BBT nhận bài: 20/02/2020, hoàn tất thủ tục phản biện: 14/4/2020)