

# XÂY DỰNG CÔNG THỨC TÍNH BỔ SUNG CHO MỘT SỐ BẢNG BIỂU TRONG CÁC BÁO CÁO KHOA HỌC VÀ TÀI LIỆU TRA CỨU

● HOÀNG QUỐC THẮNG

## TÓM TẮT:

Việc thể hiện các kết quả nghiên cứu hai đại lượng có quan hệ phụ thuộc thường được trình bày dưới dạng bảng hay đồ thị thể hiện các cặp số liệu rời rạc. Rất ít trường hợp kết quả được trình bày dưới dạng mô hình toán học hay biểu thức toán học. Bài báo này trình bày ý tưởng các bước xây dựng công thức tính toán có thể bổ sung hoặc thay thế cho một số loại bảng biểu, đồ thị. Công thức tính còn có thể dùng để nội suy phi tuyến một số bảng biểu trong các tài liệu tra cứu.

**Từ khóa:** Tra bảng, công thức tính, nội suy phi tuyến, khai triển Taylor.

## 1. Đặt vấn đề

Khi trình bày các kết quả khảo sát, nghiên cứu thực nghiệm người ta thường trình bày dưới dạng bảng hoặc đồ thị biểu diễn một tính chất Y phụ thuộc vào một tính chất X của đối tượng nghiên cứu. Về bản chất Y là một hàm số của một biến X, ta có  $Y=f(X)$ .

Trong bài báo này, tác giả trình bày cách thức xây dựng công thức tính toán bổ sung thêm cho phương pháp trình bày kết quả bằng bảng biểu. Công thức  $Y=f(X)$  mô tả chính xác các kết quả nghiên cứu bằng một biểu thức toán học đẹp đẽ.

Công thức tính toán còn dùng để nội suy phi tuyến thay cho phương pháp tính toán nội suy thường dùng khi tra bảng. Có thể sử dụng phương pháp lập công thức để chuyển đổi một số bảng tra số liệu trong các tài liệu tra cứu quy phạm kỹ thuật giúp ích cho việc tính toán và lập trình bằng máy tính.

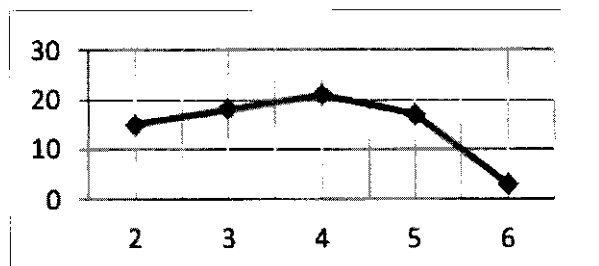
## 2. Bài toán và trình tự xây dựng công thức

### 2.1. Bài toán

Xét trường hợp đại lượng nghiên cứu Y có quan hệ phụ thuộc với đại lượng X được trình bày dưới dạng bảng hoặc dạng đồ thị (Hình 1).

**Hình 1: Biểu diễn hai đại lượng X, Y ở dạng bảng và đồ thị**

X	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	...	$x_n$
Y	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	...	$y_n$



Thông thường khi nghiên cứu các đại lượng người ta thường dùng phương pháp nội suy tuyến tính theo công thức 1:

Với  $x_i \leq x_m \leq x_{i+1}$ , ta có

$$y_m = y_i + \frac{x_m - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (1)$$

Phương pháp nội suy tuyến tính có ưu điểm là tính toán đơn giản. Tuy nhiên nhược điểm của phương pháp là sử dụng các giá trị khác nhau ứng với các khoảng chứa x, y để nội suy, nên dễ gây nhầm lẫn. Nếu sử dụng phương pháp này trong lập trình sẽ gặp nhiều khó khăn, phức tạp.

Vì vậy từ các cặp số liệu trên cần xây dựng một biểu thức tính toán duy nhất bổ sung cho bảng biểu. Biểu thức tính toán lập được có dạng hàm số  $y = f(x)$  là một đa thức bậc n và Hàm số xác định trong khoảng  $[a; b]$ .

Cơ sở lý thuyết và các bước xây dựng công thức được trình bày trong mục 2.2 và mục 2.3.

**2.2. Cơ sở lý thuyết**

Như ta đã biết, một hàm số  $y = f(x)$  có thể được cho dưới dạng bảng hoặc dạng biểu thức. Nếu hàm số ở dạng biểu thức ta có thể dễ dàng lập được bảng giá trị của hàm số với  $x = x_i$  và  $y = f(x_i)$ . Nếu  $y = f(x)$  liên tục và có đạo hàm hữu hạn đến cấp n trên tập xác định  $[a; b]$  thì  $y = f(x)$  có thể triển khai dạng xấp xỉ theo dạng hàm đa thức bậc n.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \quad (2)$$

Đa thức này được gọi là “Xấp xỉ Taylor” bậc n của hàm đã cho. Xấp xỉ này càng chính xác khi x tiến dần về  $x_0$ , và kém chính xác khi x càng xa điểm  $x_0$ . Sai số của xấp xỉ phụ thuộc vào phần dư  $R_n(x)$ . Sai số khi khai triển:

$$R_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}] \quad (3)$$

Biểu thức (2) có thể viết lại dưới dạng tổng quát là:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = f(x) \quad (4)$$

Biểu thức (4) mô tả hàm đa thức bậc n.

Xét trường hợp cho bảng số liệu có k cặp số  $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_k; y_k)$ , ta sẽ lập được hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_nx_k^n = y_k \end{cases} \quad (5)$$

Trong đó  $n=k-1$ . Đây là hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số là:  $a_0; a_1; a_2; \dots a_n$

Hệ phương trình (5) viết dưới dạng ma trận là:

$$[X] \cdot [A] = [Y] \quad (6)$$

Trong đó:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^n \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[A] = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix}; [Y] = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{Bmatrix}$$

Giải phương trình (6) ta được:  $[A] = [X]^{-1} \cdot [Y]$

Thay  $[A]$  vào biểu thức (4) ta được  $y = f(x)$  là biểu thức cần tìm.

**2.3. Trình tự xây dựng công thức**

- Bước 1: Nhập số liệu  $\{x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_k\}^T$  và  $\{y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_k\}^T$
- Bước 2: Tính toán
  - + Xác định  $[X]$  theo công thức (7)
  - + Tính ma trận nghịch đảo  $[X]^{-1}$
  - + Tính  $[A] = [X]^{-1} \cdot [Y]$
- Bước 3: Thay  $[A]$  vào (4), được đa thức bậc n là công thức cần tìm

**3. Các ví dụ minh họa**

**3.1. Ví dụ 1**

Viết công thức tính toán biểu diễn mối quan hệ  $y = f(x)$  theo công thức (4) với số liệu cho theo Bảng 1.

**Bảng 1. Bảng số liệu hai đại lượng có quan hệ phụ thuộc**

x	2	3	4
y	3	6	8

- *Lời giải:* Bảng số liệu đã cho có 3 cặp quan hệ (x; y). Vì vậy, ta có thể xây dựng công thức dạng đa thức bậc 2:

$$Y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4.1)$$

Theo công thức (6),(7) ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$\{a_0; a_1; a_2\} = \{-6; 5,5; -5\}.$$

Thay vào (4.1) ta được:

$$Y = -6 + 5,5x - 0,5x^2 \quad (4.1.1)$$

- So sánh kết quả theo công thức (4.1.1) và nội suy tuyến tính

Công thức (4.1.1) mô tả chính xác các điểm cho trong bảng. Ngoài ra còn cho phép tính toán giá trị y tại mỗi điểm x bất kỳ trong khoảng [3;4]. Kết quả tính toán theo công thức cũng phù hợp với phương pháp tra bảng và nội suy tuyến tính. (Hình 2)

### 3.2. Ví dụ 2

Chuyển đổi bảng tra 2 theo dạng công thức tính (4). (Bảng 2)

- *Lời giải:* Nhận thấy, Mỗi loại bê tông phân loại theo mác, Bảng tra cho bốn cặp giá trị ứng với ( $R_a$ ;  $\alpha_0$ ), ta có thể xây dựng hệ gồm 5 công thức dạng hàm đa thức bậc 3 dưới đây: (4.2)

Bảng 2<sup>(2)</sup>

Cường độ tính toán $R_a$ (T/cm <sup>2</sup> )	Hệ số $\alpha_0$ với mác bê tông chịu nén của bê tông nặng				
	200	200 - 300	350 - 400	500	600
3.00	0.62	0.58	0.55	0.52	0.48
4.00	0.58	0.55	0.55	0.50	0.45
5.00	0.55	0.55	0.52	0.45	0.42
6.00	0.50	0.48	0.45	0.42	0.40

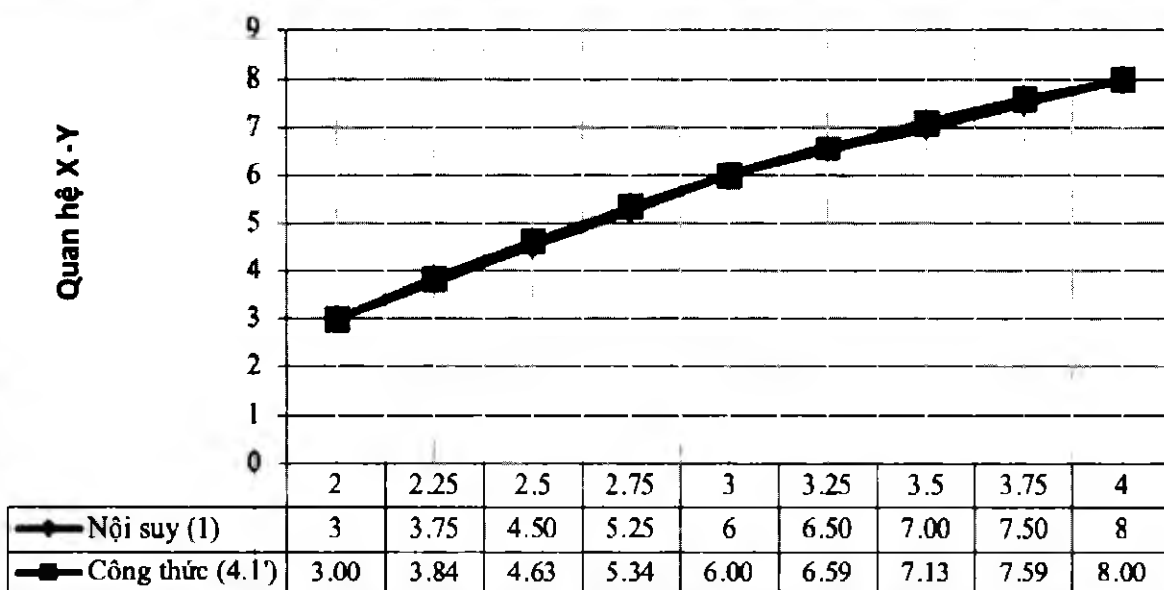
Chú thích:

+ Với các  $R_a$  trung gian cho phép lấy  $\alpha_0$  theo giá trị  $R_a$  ở cận trên hoặc cũng có thể lấy theo nội suy đường thẳng

+ Đối với kết cấu dùng bê tông nhẹ lấy  $\alpha_0$  giảm xuống 5% giá trị trong bảng.

$$\begin{cases} \alpha_{01} = a_{01} + a_{11}R_a + a_{21}R_a^2 + a_{31}R_a^3 \\ \alpha_{02} = a_{02} + a_{12}R_a + a_{22}R_a^2 + a_{32}R_a^3 \\ \alpha_{03} = a_{03} + a_{13}R_a + a_{23}R_a^2 + a_{33}R_a^3 \\ \alpha_{04} = a_{04} + a_{14}R_a + a_{24}R_a^2 + a_{34}R_a^3 \\ \alpha_{05} = a_{05} + a_{15}R_a + a_{25}R_a^2 + a_{35}R_a^3 \end{cases} \quad (4.2)$$

Hình 2: Kết quả theo công thức và nội suy tuyến tính



Công thức (6) và (7) viết cho Bảng 2 là  $[R_a] \cdot \{A\} = \{a_0\}$ , cụ thể như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.62 & 0.58 & 0.55 & 0.52 & 0.48 \\ 0.58 & 0.55 & 0.55 & 0.50 & 0.45 \\ 0.55 & 0.55 & 0.52 & 0.45 & 0.42 \\ 0.50 & 0.48 & 0.45 & 0.42 & 0.40 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Giải (4.3) ta được:

$$\begin{Bmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1 & 1.85 & 0.47 & -0.1 & 0.47 \\ -0.31 & -0.91833 & 0.02667 & 0.47667 & 0.048333 \\ 0.065 & 0.02667 & 0.005 & -0.115 & -0.02 \\ -0.005 & -0.00167 & -0.00167 & 0.00833 & 0.001667 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Thay (4.4) vào (4.2) ta được các công thức tính trong Bảng 3.

Các biểu thức từ (4.2.1) đến (4.2.5) là các công thức để xác định cần tìm.

- So sánh kết quả theo công thức và nội suy tuyến tính

Nhận thấy các công thức tìm được ở trên đều là các hàm đa thức có thể biểu diễn bằng đồ thị là các đường cong trơn như Hình 3.

**Bảng 3. Các công thức tính  $\alpha_0$**

Mác BT	Công thức tính	
200	$1.1 - 0.31 R_a + 0.065 R_a^2 - 0.005 R_a^3$	(4.2.1)
200-300	$1.85 - 0.91833 R_a + 0.215 R_a^2 - 0.01667 R_a^3$	(4.2.2)
350-400	$0.47 + 0.02667 R_a + 0.005 R_a^2 - 0.00167 R_a^3$	(4.2.3)
500	$-0.1 + 0.4767 R_a - 0.115 R_a^2 + 0.00833 R_a^3$	(4.2.4)
600	$0.47 + 0.04833 R_a - 0.02 R_a^2 + 0.00167 R_a^3$	(4.2.5)

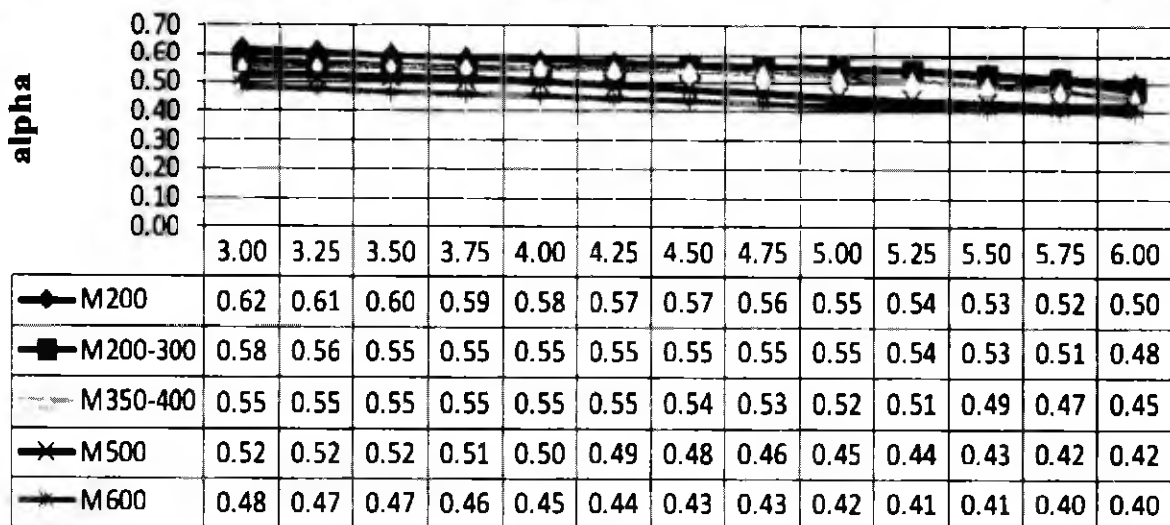
So sánh khi sử dụng công thức tính từ (4.2.1) đến (4.2.5) và phương pháp nội suy tuyến tính. Kết quả ở Bảng 4 cho thấy độ chính xác phù hợp với yêu cầu tính toán.

**4. Kết luận**

Với các bảng biểu số liệu mô tả các đại lượng nghiên cứu phụ thuộc đều cho phép xây dựng công thức biểu diễn mối quan hệ của các đại lượng nghiên cứu bằng một hàm toán học.

Bản chất các thuộc tính của các đại lượng nghiên cứu đều là ngẫu nhiên và gần đúng. Vì vậy, việc xây dựng công thức đạt được yêu cầu cho giá

**Hình 3: Đồ thị các hàm số từ công thức (4.2.1) đến (4.2.5)**



**Cường độ bê tông tính toán  $R_a$  (T/cm<sup>2</sup>)**

**Bảng 4. So sánh kết quả công thức và nội suy**

Cường độ tính toán $R_a$	Hệ số $\alpha_0$ với mác bê tông chịu nén của bê tông nặng									
	200		200-300		350-400		500		600	
	Nội suy	công thức	Nội suy	công thức	Nội suy	công thức	Nội suy	công thức	Nội suy	công thức
3.00	0.62	0.62	0.58	0.58	0.55	0.55	0.52	0.52	0.48	0.48
3.25	0.61	0.61	0.57	0.56	0.55	0.55	0.52	0.52	0.47	0.47
3.50	0.60	0.60	0.57	0.55	0.55	0.55	0.51	0.52	0.47	0.47
3.75	0.59	0.59	0.56	0.55	0.55	0.55	0.51	0.51	0.46	0.46
4.00	0.58	0.58	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.45	0.45
4.25	0.57	0.57	0.55	0.55	0.54	0.55	0.49	0.49	0.44	0.44
4.50	0.57	0.57	0.55	0.55	0.54	0.54	0.48	0.48	0.44	0.43
4.75	0.56	0.56	0.55	0.55	0.53	0.53	0.46	0.46	0.43	0.43
5.00	0.55	0.55	0.55	0.55	0.52	0.52	0.45	0.45	0.42	0.42
5.25	0.54	0.54	0.53	0.54	0.50	0.51	0.44	0.44	0.42	0.41
5.50	0.53	0.53	0.52	0.53	0.49	0.49	0.44	0.43	0.41	0.41
5.75	0.51	0.52	0.50	0.51	0.47	0.47	0.43	0.42	0.41	0.40
6.00	0.50	0.50	0.48	0.48	0.45	0.45	0.42	0.42	0.40	0.40

trị xấp xỉ với độ chính xác cần thiết. Độ chính xác của công thức (4) càng cao khi ta có bảng các cặp số liệu lớn, dày đặc hơn.

Khi một đại lượng nghiên cứu phụ thuộc vào nhiều đại lượng khác ta có bảng hai chiều, ba

chiều... Việc trình bày kết quả bằng bảng biểu cho những trường hợp này là rất phức tạp và khó thực hiện. Trong trường hợp này việc xây dựng một biểu thức tính toán tương tự là thực sự cần thiết ■

**TÀI LIỆU THAM KHẢO:**

1. Nguyễn Đình Trí (chủ biên), *Toán học cao cấp, tập 1+2*, NXB Giáo dục 2006;
2. *Tuyển tập tiêu chuẩn xây dựng của Việt nam, Trang 35, TCVN 5574:91*, NXB Xây dựng, Hà Nội 1999.

**Ngày nhận bài: 8/9/2002**

**Ngày phản biện đánh giá và sửa chữa: 18/9/2020**

**Ngày chấp nhận đăng bài: 28/9/2020**

*Thông tin tác giả:*

**ThS. HOÀNG QUỐC THẮNG**

**Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội**

**BUILDING SUPPLEMENTAL FORMULAS  
FOR SOME TABLES IN SCIENTIFIC REPORTS  
OR SCHOLARLY DOCUMENTS**

● **Master. HOANG QUOC THANG**  
Hanoi Architectural University

**ABSTRACT:**

The results of surveys or studies on two interdependent subjects is often represented by tables or graphs. Very few cases are modeled mathematically and represented by mathematical expressions. This article presents ideas on steps to establish calculation formulas that can supplement or replace some types of tables and graphs. The calculation formula can also be used to nonlinearly interpolate some numerical data or information in scientific reports or scholarly documents.

**Keywords:** Lookup tables, formulas, nonlinearly interpolation method, Taylor expansion formula.