

# NGHIÊN CỨU CÁC TÍNH CHẤT PHI CỔ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP PHẢN ĐỐI XỨNG THÊM BA VÀ BỐT MỘT PHOTON TỔNG

HỒ NGỌC TRUNG, TRƯƠNG MINH DỨC\*  
Khoa Vật lý, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế  
\*Email: [truongminhduc@dhsphue.edu.vn](mailto:truongminhduc@dhsphue.edu.vn)

**Tóm tắt:** Bài báo này trình bày một nghiên cứu của chúng tôi về các tính chất phi cổ điển bậc thấp và bậc cao của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng. Kết quả khảo sát cho thấy trạng này thể hiện tính chất nén tổng hai mode nhưng hoàn toàn không có tính chất nén hiệu hai mode. Khi khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, chúng tôi nhận thấy trạng thái này hoàn toàn vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Hơn nữa, khi nghiên cứu các tính chất phản kết chùm hai mode, kết quả khảo sát cho thấy trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng thể hiện tính chất phản kết chùm ở mọi bậc thấp và cao, trong đó bậc càng cao thì cấp độ phản kết chùm càng thể hiện mạnh hơn.

**Từ khóa:** Nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, phản kết chùm.

## 1 GIỚI THIỆU

Việc tạo ra các trạng thái phi cổ điển có ý nghĩa rất quan trọng, đặc biệt đối với ngành khoa học lượng tử, vì khả năng ứng dụng của chúng vào xử lý thông tin lượng tử như tăng tốc độ truyền thông tin, tăng tính bảo mật, đồng thời giảm nhiễu tín hiệu và tăng độ trung thực của thông tin [1]. Bên cạnh đó, các trạng thái này được nghiên cứu để áp dụng vào nhiều lĩnh vực khác như quang lượng tử, kỹ thuật lượng tử và vật lý chất rắn [2]. Các trạng thái phi cổ điển ngày càng được nhiều nhà khoa học tiếp tục nghiên cứu và phát triển, với việc nghiên cứu các trạng thái phi cổ điển như trạng thái nén, trạng thái kết hợp đối xứng, phản đối xứng. Vào 1991, Agarwal và Tara đã đề xuất ý tưởng về trạng thái kết hợp thêm photon [3], sau đó được các nhà vật lý khác nghiên cứu, khảo sát [4, 5]. Ngoài thêm photon còn có bớt photon vào các trạng thái kết hợp cũng được nghiên cứu [6] và cho ra đời các trạng thái phi cổ điển mới khác. Việc nghiên cứu tính chất của các trạng thái phi cổ điển thêm và bớt photon là việc hết sức quan trọng, không chỉ tạo ra các trạng thái phi cổ điển mới, mà còn mở ra nhiều hướng nghiên cứu mới cho các nhà khoa học. Từ kết quả thu được, người ta ứng dụng các trạng thái này vào các ngành khoa học

kỹ thuật, nhất là đối với khoa học thông tin lượng tử và máy tính lượng tử. Quá trình khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm và bớt photon lên hai mode kết hợp phản đối xứng đã được một số tác giả thực hiện [7, 8]. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra trạng thái gọi là trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng như sau:

$$|\psi\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}(\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{b}) (|\alpha\rangle_a |\beta\rangle_b - |\beta\rangle_a |\alpha\rangle_b), \quad (1)$$

trong đó

$$N_{\alpha,\beta} = \{|\alpha|^6 + |\beta|^6 + 9(|\alpha|^4 + |\beta|^4) + 19(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 12 + 2\text{Re}[\alpha^3\beta + \alpha\beta^3] - \exp[-|\alpha - \beta|^2](2\text{Re}[\alpha^* \beta^3 + 9\alpha^* \beta^2 + 19\alpha^* \beta + \alpha^3 \beta + \alpha\beta^3] + 12)\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

là hệ số chuẩn hóa,  $\hat{a}^\dagger$  và  $\hat{b}$  lần lượt là toán tử sinh đối với mode  $a$  và toán tử hủy đối với mode  $b$ ,  $\text{Re}[Z]$  là kí hiệu phần thực của một số phức  $Z$ . Đây là một trạng thái mới, chưa được nghiên cứu, khảo sát. Vì vậy, trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng thông qua tính chất nén tổng hai mode và nén hiệu hai mode, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và tính chất phản kết chùm bậc cao hai mode.

## 2 TÍNH CHẤT NÉN CỦA TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP PHẢN ĐỐI XỨNG THÊM BA VÀ BỚT MỘT PHOTON TỔNG

### 2.1. Nén tổng hai mode

Hai kiểu nén bậc cao là nén tổng và nén hiệu hai mode đã được Hillery [9] đưa ra vào năm 1989. Theo đó, một trạng thái được gọi là nén tổng nếu trung bình trong trạng thái đó thỏa mãn bất đẳng thức

$$\left\langle \left( \Delta \hat{V}_\varphi \right)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2 < \frac{1}{4} \langle \hat{n}_a + \hat{n}_b + 1 \rangle, \quad (3)$$

trong đó  $\hat{V}_\varphi = \frac{1}{2} \left( e^{i\varphi} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi} \hat{a} \hat{b} \right)$ ,  $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$  lần lượt là toán tử số hạt của hai mode  $a$  và  $b$ . Để thuận tiện cho việc khảo sát ta đặt  $S$  là tham số nén tổng có dạng

$$S = \left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4} (\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1). \quad (4)$$

Một trạng thái gọi là nén tổng hai mode nếu tham số  $S < 0$ . Vì  $\alpha$  và  $\beta$  là các số phức nên ta đặt  $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$ ,  $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$  và  $\phi_{h,k,m} = h\varphi + k\varphi_a + m\varphi_b$ , với  $h, k, m$  là các số nguyên,  $r_a, r_b, \varphi_a, \varphi_b$  là các số thực. Sử dụng trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng vào công thức (4) ta nhận được

$$S = \frac{1}{4} N_{\alpha\beta}^2 \{ 2\{ (r_a^8 r_b^2 + r_a^2 r_b^8 + 15(r_a^6 r_b^2 + r_a^2 r_b^6) + 61(r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4) + 240r_a^2 r_b^2) \cos(\phi_{2,-2,-2}) + (r_a^5 r_b^3 + 6r_a^3 r_b^3 + 6r_a r_b^3) \cos(\phi_{2,1,-1}) + r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{2,-5,-3}) + r_a^3 r_b^5 \cos(\phi_{2,-3,-5}) \}$$

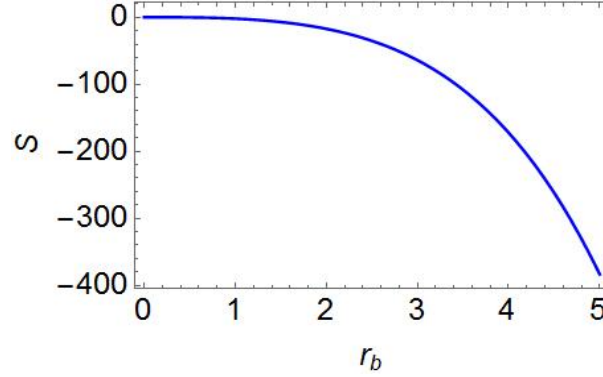
$$\begin{aligned}
& + (r_a^3 r_b^5 + 6r_a^3 r_b^3 + 6r_a^3 r_b) \cos(\phi_{2,-1,1}) - x(2r_a^5 r_b^5 (\cos(\phi_{2,-5,1}) + \cos(\phi_{2,1,-5})) \\
& + 15r_a^4 r_b^4 (\cos(\phi_{2,-4,0}) + \cos(\phi_{2,0,-4})) + 61r_a^3 r_b^3 (\cos(\phi_{2,-3,-1}) + \cos(\phi_{2,-1,-3})) \\
& + (r_a^3 r_b^5 + 6r_a^3 r_b) \cos(\phi_{2,-1,1}) + 120r_a^2 r_b^2 \cos(\phi_{2,-2,-2}) + r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{2,-5,-3}) \\
& + r_a^3 r_b^5 \cos(\phi_{2,-3,-5}) + (r_a^5 r_b^3 + 6r_a r_b^3) \cos(\phi_{2,1,-1}) + 6(r_a^2 r_b^4 + r_a^4 r_b^2) \cos(\phi_{2,0,0}) \} \\
& + 2(r_a^8 r_b^2 + r_a^2 r_b^8) + 31(r_a^6 r_b^2 + r_a^2 r_b^6) + 137(r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4) + 350r_a^2 r_b^2 + 139(r_a^2 \\
& + r_b^2) + r_a^8 + r_b^8 + 16(r_a^6 + r_b^6) + 73(r_a^4 + r_b^4) + 48 + 2(2r_a^5 r_b^3 + 7r_a^3 r_b^3 + r_a^5 r_b \\
& + 4r_a^3 r_b) \cos(\phi_{0,3,1}) + 2(2r_a^3 r_b^5 + 7r_a^3 r_b^3 + r_a r_b^5 + 4r_a r_b^3) \cos(\phi_{0,1,3}) - x(350r_a^2 r_b^2 \\
& + 48 + 2[r_a^4 r_b^4 \cos(\phi_{0,4,-4}) + 73r_a^2 r_b^2 \cos(\phi_{0,2,-2}) + 31r_a^4 r_b^4 \cos(\phi_{0,2,-2}) \\
& + (137r_a^3 r_b^3 + 139r_a r_b) \cos(\phi_{0,1,-1}) + (2r_a^3 r_b^5 + 4r_a r_b^3) \cos(\phi_{0,1,3}) + r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{0,4,0}) \\
& + (2r_a^5 r_b^5 + 16r_a^3 r_b^3) \cos(\phi_{0,3,-3}) + (2r_a^5 r_b^3 + 4r_a^3 r_b) \cos(\phi_{0,3,1}) + r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{0,0,4}) \\
& + 7(r_a^2 r_b^4 + r_a^4 r_b^2) \cos(\phi_{0,2,2})] \} - \{ (16(r_a^6 + r_b^6) + r_a^8 + r_b^8 + 73(r_a^4 + r_b^4) \\
& + 103(r_a^2 + r_b^2) + 48 + r_a^6 r_b^2 + r_a^2 r_b^6 + 9(r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4) + (8r_a^3 r_b + 2r_a^5 r_b) \cos(\phi_{0,3,1}) \\
& + 38r_a^2 r_b^2 + 2r_a^3 r_b^3 (\cos(\phi_{0,3,1}) + \cos(\phi_{0,1,3})) + (8r_a r_b^3 + 2r_a r_b^5) \cos(\phi_{0,1,3}) \\
& - x(2r_a^4 r_b^4 \cos(\phi_{4,0,0}) + 32r_a^3 r_b^3 \cos(\phi_{3,0,0}) + (2r_a^4 r_b^2 + 2r_a^2 r_b^4) \cos(\phi_{0,2,2}) \\
& + (146r_a^2 r_b^2 + 2r_a^4 r_b^4) \cos(\phi_{2,0,0}) + (206r_a r_b + 18r_a^3 r_b^3) \cos(\phi_{1,0,0}) + 48 \\
& + 2r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{0,4,0}) + 2r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{0,0,4}) + 8r_a^3 r_b \cos(\phi_{0,3,1}) + 8r_a r_b^3 \cos(\phi_{0,1,3}) \\
& + 38r_a^2 r_b^2) \} - \frac{1}{4} N_{\alpha\beta}^4 \{ ((2r_a^2 r_b^4 + 6r_a^2 r_b^2) \cos(\phi_{1,0,2}) + 2(r_a^7 r_b + r_b^7 r_a + 12(r_a^5 r_b \\
& + r_b^5 r_a) + 48r_a r_b + 37(r_a^3 r_b + r_b^3 r_a)) \cos(\phi_{1,-1,-1}) + (2r_b^3 r_a + 2r_a^3 r_b) \cos(\phi_{1,-1,-1}) \\
& + (2r_a^4 r_b^2 + 6r_a^2 r_b^2) \cos(\phi_{1,2,0}) + 2r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{1,-4,-2}) + 2r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{1,-2,-4}) \\
& - x(2r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{1,0,2}) + 2r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{1,-2,-4}) + 6(r_a^3 r_b + r_b^3 r_a) \cos(\phi_{1,1,1}) \\
& + 2r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{1,2,0}) + 2r_a^4 r_b^4 (\cos(\phi_{1,-4,2}) + \cos(\phi_{1,2,-4})) + 2r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{1,-4,-2}) \\
& + 24r_a^3 r_b^3 (\cos(\phi_{1,-3,1}) + \cos(\phi_{1,1,-3})) + 96r_a r_b \cos(\phi_{1,-1,-1}) + 74r_a^2 r_b^2 (\cos(\phi_{1,-2,0}) \\
& + \cos(\phi_{1,0,-2})) \}^2, \tag{5}
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
N_{\alpha,\beta} = & (r_a^6 + r_b^6 + 9(r_a^4 + r_b^4) + 19(r_a^2 + r_b^2) + 2r_a^3 r_b \cos(\phi_{0,3,1}) + 2r_a r_b^3 \cos(\phi_{0,1,3}) \\
& + 12 - x(2r_a^3 r_b^3 \cos(\phi_{0,3,-3}) + 18r_a^2 r_b^2 \cos(\phi_{0,2,-2}) + 38r_a r_b \cos(\phi_{0,1,-1}) \\
& + 2r_a^3 r_b \cos(\phi_{0,3,1}) + 2r_a r_b^3 \cos(\phi_{0,1,3}) + 12)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6}
\end{aligned}$$

với  $x = \exp[-r_a^2 - r_b^2 + 2r_a r_b \cos(\phi_{0,1,-1})]$ .

Đồ thị 1 khảo sát sự phụ thuộc của tham số  $S$  vào biên độ kết hợp  $r_b$  với điều kiện khảo sát là  $r_a = r_b$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_a = \pi$ ,  $\varphi_b = \frac{\pi}{2}$  và  $0 \leq r_b \leq 5$ . Nhìn vào đồ thị ta thấy tham số nén tổng  $S$  luôn bé hơn hoặc bằng 0, nghĩa là luôn xuất hiện quá trình nén tổng trong trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng. Khi các tham số  $r_a$ ,  $r_b$  càng tăng thì tham số  $S$  càng âm, nghĩa là quá trình nén tổng càng thể hiện rõ. Với



Hình 1: Khảo sát sự phụ thuộc của tham số  $S$  vào biên độ kết hợp  $r_b$  của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng.

điều kiện khảo sát trên, chứng tỏ trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng có tính nén tổng. Khi các tham số  $r_a$ ,  $r_b$  càng tăng thì tính nén tổng của trạng thái càng thể hiện rõ.

## 2.2. Nén hiệu hai mode

Theo Hillery [9] một trạng thái được gọi là nén hiệu hai mode nếu khi trung bình trong trạng thái đó thỏa mãn bất đẳng thức

$$\langle \hat{W}_\varphi^2 \rangle - \langle \hat{W}_\varphi \rangle^2 - \frac{1}{4} (|\hat{n}_a - \hat{n}_b|) < 0. \quad (7)$$

Để đơn giản cho việc khảo sát tính chất nén hiệu, ta đặt tham số nén hiệu  $D$  có dạng

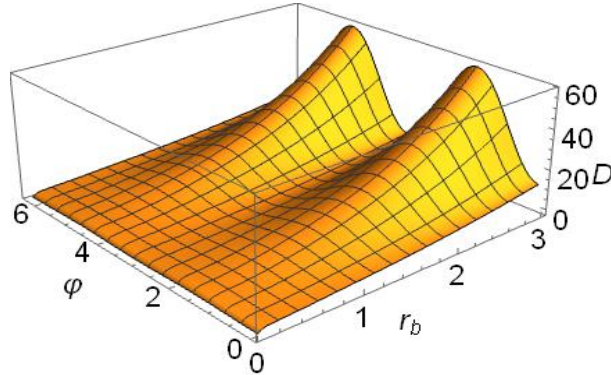
$$D = \langle \hat{W}_\varphi^2 \rangle - \langle \hat{W}_\varphi \rangle^2 - \frac{1}{4} (|\hat{n}_a - \hat{n}_b|), \quad (8)$$

trong đó  $\hat{W}_\varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} \hat{a} \hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi} \hat{a}^\dagger \hat{b})$ ,  $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$  lần lượt là toán tử số hạt của hai mode  $a$  và  $b$ . Một cách tương tự phần nén tổng, khi khảo sát tính nén hiệu của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng ta thu được kết quả cụ thể như sau

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{4} N_{\alpha\beta}^2 \{ (2r_a^2 r_b^8 + 30r_a^2 r_b^6 + 120r_a^2 r_b^4 + 120r_a^2 r_b^2 + 2r_a^4 r_b^2) \cos(\phi_{2,-2,2}) + (2r_a^5 r_b^3 + 12r_a^3 r_b^3 \\ & + 12r_a r_b^3) \cos(\phi_{2,-1,-3}) + 2r_a^3 r_b^5 \cos(\phi_{2,-1,5}) + 2r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{2,5,-1}) + (2r_a^3 r_b^5 + 12r_a^3 r_b^3 \\ & + 12r_a r_b^3) \cos(\phi_{2,-3,-1}) + (2r_a^8 r_b^2 + 30r_a^6 r_b^2 + 120r_a^4 r_b^2 + 120r_a^2 r_b^2 + 2r_a^2 r_b^4) \cos(\phi_{2,2,-2}) \\ & - x(2r_a^3 r_b^7 \cos(\phi_{2,-3,3}) + 2r_a r_b^7 \cos(\phi_{2,1,3}) + 2r_a^7 r_b^3 \cos(\phi_{2,3,-3}) + 2r_a^7 r_b \cos(\phi_{2,3,1}) \\ & + (120r_a r_b^5 + 2r_a^5 r_b) \cos(\phi_{2,-1,1}) + (120r_a^5 r_b + 2r_a r_b^5) \cos(\phi_{2,1,-1}) + 30r_a^2 r_b^6 \cos(\phi_{2,-1,1}) \\ & + 30r_a^6 r_b^2 \cos(\phi_{2,1,-1}) + (2r_a^3 r_b^5 + 12r_a^3 r_b) \cos(\phi_{2,-3,-1}) + 12r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{2,-2,-2}) + 12r_a^4 r_b^2 \\ & \cos(\phi_{2,-2,-2}) + (2r_a^5 r_b^3 + 12r_a r_b^3) \cos(\phi_{2,-1,-3}) + 120(r_a^4 + r_b^4) \cos(\phi_{2,0,0}) \} + 2(r_a^8 r_b^2 \\ & + r_a^2 r_b^8) + 31(r_a^6 r_b^2 + r_a^2 r_b^6) + 137(r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4) + 350r_a^2 r_b^2 + 120(r_a^2 + r_b^2) + r_a^8 + r_b^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 64(r_a^4 + r_b^4) + 15(r_a^6 + r_b^6) + (4r_a^5 r_b^3 + 14r_a^3 r_b^3 + 2r_a^5 r_b + 6r_a^3 r_b) \cos(\phi_{0,3,1}) + (4r_a^3 r_b^5 \\
& + 14r_a^3 r_b^3 + 2r_a r_b^5 + 6r_a r_b^3) \cos(\phi_{0,1,3}) + 36 - x(2r_a^4 r_b^4 \cos(\phi_{0,4,-4}) + (4r_a^5 r_b^5 + 30r_a^3 r_b^3) \\
& \cos(\phi_{0,3,-3}) + 128r_a^2 r_b^2 \cos(\phi_{0,2,-2}) + 350r_a^2 r_b^2 + 36 + (4r_a^3 r_b^5 + 6r_a r_b^3) \cos(\phi_{0,1,3}) \\
& + 2r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{0,0,4}) + (4r_a^5 r_b^3 + 6r_a^3 r_b) \cos(\phi_{0,3,1}) + (62r_a^4 r_b^4 + 274r_a^3 r_b^3 + 240r_a r_b) \\
& \cos(\phi_{0,1,-1}) + 2r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{0,4,0}) + 14(r_a^2 r_b^4 + r_a^4 r_b^2) \cos(\phi_{0,2,2}) - |(36 + r_a^8 + r_b^8 + 15(r_a^6 \\
& + r_b^6) + 62(r_a^4 + r_b^4) + (2r_a^5 r_b + 6r_a^3 r_b - 2r_a^3 r_b^3) \cos(\phi_{0,3,1}) - 34r_a^2 r_b^2 - (r_a^6 r_b^2 + r_a^2 r_b^6) \\
& + 72(r_a^2 + r_b^2) + (2r_a r_b^5 + 6r_a r_b^3 - 2r_a^3 r_b^3) \cos(\phi_{0,1,3}) - 9(r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4) - x(36 - 34r_a^2 r_b^2 \\
& + (124r_a^2 r_b^2 - 2r_a^4 r_b^4) \cos(\phi_{2,0,0}) + 2r_a^4 r_b^4 \cos(\phi_{4,0,0}) + 2r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{0,0,4}) + 2r_a^4 r_b^2 \\
& \cos(\phi_{0,4,0}) + 6r_a^3 r_b \cos(\phi_{0,3,1}) + 30r_a^3 r_b^3 \cos(\phi_{3,0,0}) + (144r_a r_b - 18r_a^3 r_b^3) \cos(\phi_{1,0,0}) \\
& - (2r_a^2 r_b^4 + 2r_a^4 r_b^2) \cos(\phi_{0,2,2}) + 6r_a r_b^3 \cos(\phi_{0,1,3}))| \} - \frac{1}{4} N_{\alpha\beta}^4 \{ (2r_a^7 r_b + 24r_a^5 r_b + 72r_a^3 r_b \\
& + 48r_a r_b + 2r_a r_b^3) \cos(\phi_{1,1,-1}) + 2r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{1,4,0}) + (2r_a r_b^7 + 24r_a r_b^5 + 72r_a r_b^3 + 48r_a r_b \\
& + 2r_a^3 r_b) \cos(\phi_{1,-1,1}) + 2r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{1,0,4}) + (2r_a^4 r_b^2 + 2r_a^2 r_b^4 + 12r_a^2 r_b^2) \cos(\phi_{1,-2,-2}) \\
& - x(2r_a r_b^5 \cos(\phi_{1,1,3}) + (72r_a r_b^3 + 2r_a^3 r_b) \cos(\phi_{1,-1,1}) + 48(r_a^2 + r_b^2) \cos(\phi_{1,0,0}) + 2r_a^3 r_b^3 \\
& \cos(\phi_{1,-1,-3}) + (72r_a^3 r_b + 2r_a r_b^3) \cos(\phi_{1,1,-1}) + 2r_a^3 r_b^3 \cos(\phi_{1,-3,-3}) + 2r_a^5 r_b \cos(\phi_{1,3,1}) \\
& + 2r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{1,3,-3}) + 24r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{1,-2,2}) + 24r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{1,2,-2}) + 12r_a^2 r_b^2 \cos(\phi_{1,-2,-2}) \\
& + 2r_a^3 r_b^5 \cos(\phi_{1,-3,3})) \}^2. \tag{9}
\end{aligned}$$

Đồ thị 2 khảo sát tham số  $D$  theo biên độ kết hợp  $r_b$  và hướng nén  $\varphi$  với điều kiện khảo



Hình 2: Khảo sát sự phụ thuộc của tham số  $D$  vào biên độ kết hợp  $r_b$  và hướng nén  $\varphi$  của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng.

sát là  $r_a = 2r_b, \varphi_a = 0, \varphi_b = \frac{\pi}{2}, 0 \leq r_b \leq 3$  và  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Nhìn vào đồ thị ta thấy tham số nén hiệu  $D$  luôn lớn hơn hoặc bằng 0 và chúng có tính tuần hoàn theo hướng nén  $\varphi$ . Khi các tham số  $r_a, r_b$  càng tăng thì tham số  $D$  càng dương, tức là càng không có tính chất nén hiệu hai mode. Như vậy, với điều kiện khảo sát như trên, trạng thái thêm ba và bớt một photon tổng hoàn toàn không có tính nén hiệu hai mode.

### 3 SỰ VI PHẠM BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ VÀ TÍNH PHẢN KẾT CHÙM CỦA TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP PHẢN ĐỐI XỨNG THÊM BA VÀ BỐT MỘT PHOTON TỔNG

#### 3.1. Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

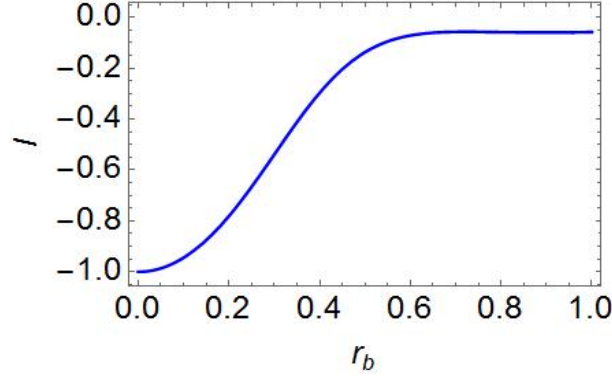
Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho trường hợp hai mode đối với các trường cổ điển có dạng

$$I = \frac{\left[ \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \right]^{\frac{1}{2}}}{\left| \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{a} \rangle \right|} - 1 \geq 0. \quad (10)$$

Sự vi phạm bất đẳng thức trên, nghĩa là  $I < 0$ , chứng tỏ trạng thái khảo sát là phi cổ điển. Đối với trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng ta thu được kết quả của tham số  $I$  như sau:

$$\begin{aligned} I = & \{ \{ r_a^{10} + r_b^{10} + 21(r_a^8 + r_b^8) + 138(r_a^6 + r_b^6) + 330(r_a^4 + r_b^4) + 250(r_a^2 + r_b^2) + r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4 \\ & + (2r_a^7 r_b + 12r_a^5 r_b + 12r_a^3 r_b) \cos(\phi_{0,3,1}) + (2r_a r_b^7 + 12r_a r_b^5 + 12r_a r_b^3) \cos(\phi_{0,1,3}) + 72 \\ & - x(72 + 2r_a^5 r_b^5 \cos(\phi_{5,0,0}) + (504r_a r_b + 2r_a^3 r_b^3) \cos(\phi_{1,0,0}) + 42r_a^4 r_b^4 \cos(\phi_{4,0,0}) + 2r_a^3 r_b^5 \\ & \cos(\phi_{0,1,-5}) + 2r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{0,5,-1}) + 276r_a^3 r_b^3 \cos(\phi_{3,0,0}) + 660r_a^2 r_b^2 \cos(\phi_{2,0,0}) + 12r_a^3 r_b \\ & \cos(\phi_{0,3,1}) + 12r_a r_b^3 \cos(\phi_{0,1,3}) + 12r_a^4 r_b^2 \cos(\phi_{0,4,0}) + 12r_a^2 r_b^4 \cos(\phi_{0,0,4}) \} \times \{ 6(r_a^4 + r_b^4) \\ & + 2r_a^3 r_b^5 \cos(\phi_{0,3,1}) + 2r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{0,1,3}) + r_a^6 r_b^4 + r_a^4 r_b^6 + 18r_a^4 r_b^4 + 18(r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4) + (r_a^6 \\ & + r_b^6) - x(2r_a^3 r_b^3 \cos(\phi_{3,0,0}) + 2r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{0,1,3}) + 2r_a^3 r_b^5 \cos(\phi_{0,3,1}) + (2r_a^5 r_b^5 + 36r_a^3 r_b^3) \\ & \cos(\phi_{1,0,0}) + 12r_a^2 r_b^2 \cos(\phi_{2,0,0}) \} + 18r_a^4 r_b^4 \}^{\frac{1}{2}} / \{ r_a^8 r_b^2 + r_a^2 r_b^8 + 15(r_a^6 r_b^2 + r_a^2 r_b^6) + 18(r_a^2 \\ & + r_b^2) + 64(r_a^4 r_b^2 + r_a^2 r_b^4) + 156r_a^2 r_b^2 + (2r_a^3 r_b^5 + 6r_a^3 r_b^3) \cos(\phi_{0,1,3}) + (2r_a^5 r_b^3 + 6r_a^3 r_b^3) \\ & \cos(\phi_{0,3,1}) - x((6r_a^2 r_b^4 + 6r_a^4 r_b^2) \cos(\phi_{0,2,2}) + 2r_a^5 r_b^5 \cos(\phi_{3,0,0}) + 30r_a^4 r_b^4 \cos(\phi_{2,0,0}) \\ & + (128r_a^3 r_b^3 + 36r_a r_b) \cos(\phi_{1,0,0}) + 156r_a^2 r_b^2 + 2r_a^3 r_b^5 \cos(\phi_{0,1,3}) + 2r_a^5 r_b^3 \cos(\phi_{0,3,1}) \} \} - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Theo điều kiện ở (10), nếu tham số  $I$  trong biểu thức (11) nhận giá trị âm thì trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Đồ thị 3 khảo sát tham số  $I$  theo biên độ kết hợp  $r_b$  với điều kiện khảo sát là  $r_a = r_b, 0 \leq r_b \leq 1, \varphi = \varphi_a = \pi, \varphi_b = 0$ . Nhìn vào đồ thị cho thấy tham số  $I$  nhận giá trị trong khoảng  $-1 \leq I \leq 0$ . Khi tham số  $r_a, r_b$  càng giảm thì tham số  $I$  càng âm. Các kết quả đó cho thấy trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và khi  $r_a, r_b$  càng giảm thì  $I$  càng âm và dần tiến về giá trị nhỏ nhất là  $-1$ , nghĩa là sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thể hiện càng mạnh.



Hình 3: Khảo sát sự phụ thuộc của tham số  $I$  vào biên độ kết hợp  $r_b$  của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng.

### 3.2. Tính phản kết chùm

Năm 1990, Ching Tsung Lee [10] đã đưa ra tính phản kết chùm và tham số  $R_{a,b}(l, p)$  đặc trưng cho tính chất đó. Theo ông, một trạng thái có tính chất phản kết chùm khi tham số  $R_{a,b}(l, p)$  thỏa mãn

$$R_{ab}(l, p) = \frac{\langle \hat{n}_a^{(l+1)} \hat{n}_b^{(p-1)} \rangle + \langle \hat{n}_a^{(p-1)} \hat{n}_b^{(l+1)} \rangle}{\langle \hat{n}_a^{(l)} \hat{n}_b^{(p)} \rangle + \langle \hat{n}_a^{(p)} \hat{n}_b^{(l)} \rangle} - 1 < 0, \quad (12)$$

với  $l, p$  là các số nguyên dương ( $l \geq p > 0$ ),  $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$  là toán tử số hạt của hai mode  $a, b$ , khi đó tham số  $R_{a,b}(l, p)$  ở (12) được viết lại như sau:

$$R_{ab}(l, p) = \frac{\langle \hat{a}^{\dagger(l+1)} \hat{a}^{(l+1)} \hat{b}^{\dagger(p-1)} \hat{b}^{(p-1)} \rangle + \langle \hat{a}^{\dagger(p-1)} \hat{a}^{(p-1)} \hat{b}^{\dagger(l+1)} \hat{b}^{(l+1)} \rangle}{\langle \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^l \hat{b}^{\dagger p} \hat{b}^p \rangle + \langle \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^p \hat{b}^{\dagger l} \hat{b}^l \rangle} - 1. \quad (13)$$

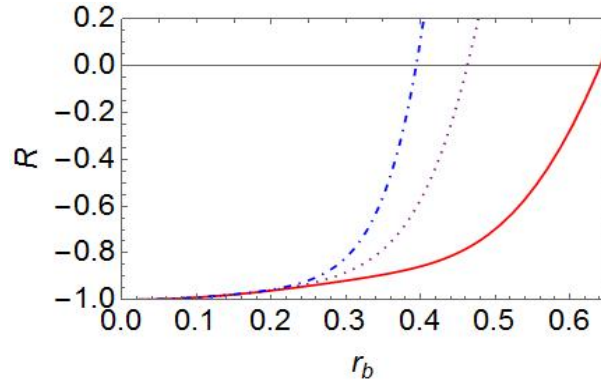
Nếu tham số  $R(l, p)$  càng âm thì tính phản kết chùm hai mode thể hiện càng mạnh. Bây giờ ta khảo sát cụ thể tính chất phản kết chùm của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng thông qua tính số hạng tổng quát  $\langle \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^l \hat{b}^{\dagger p} \hat{b}^p \rangle$ . Lưu ý rằng các số hạng còn lại có trong biểu thức (13) đều được suy ra từ số hạng tổng quát này. Thực hiện một số phép biến đổi ta thu được các kết quả như sau:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^l \hat{b}^{\dagger p} \hat{b}^p \rangle &= N_{\alpha\beta}^2 (r_a^{2(l+3)} r_b^{2p} + r_a^{2p} r_b^{2(l+3)}) + (6l + 9)(r_a^{2(l+2)} r_b^{2p} + r_a^{2p} r_b^{2(l+2)}) + (15l^2 + 30l \\ &+ 18)(r_a^{2(l+1)} r_b^{2p} + r_a^{2p} r_b^{2(l+1)}) + (20l^3 + 30l^2 + 22l + 6)(r_a^{2l} r_b^{2p} + r_a^{2p} r_b^{2l}) + (15l^4 + 3l^2) \\ &(r_a^{2(l-1)} r_b^{2p} + r_a^{2p} r_b^{2(l-1)}) + r_a^{2l} r_b^{2p+2} + r_b^{2l} r_a^{2p+2} + (6l^5 - 15l^4 + 12l^3 - 3l^2)(r_a^{2(l-2)} r_b^{2p} + r_a^{2p} \\ &r_b^{2(l-2)}) + l^2(l-1)^2(l-2)^2(r_a^{2(l-3)} r_b^{2p} + r_a^{2p} r_b^{2(l-3)}) + (2r_a^{2l+3} r_b^{2p+1} + 6lr_a^{2l+1} r_b^{2p+1} + 6l(l-1) \\ &r_a^{2l-1} r_b^{2p+1} + (2l^3 - 6l^2 + 4l)r_a^{2l-3} r_b^{2p+1}) \cos(\phi_{0,3,1}) + (2r_b^{2l+3} r_a^{2p+1} + 6lr_b^{2l+1} r_a^{2p+1} + 6l(l-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r_b^{2l-1} r_a^{2p+1} + (2l^3 - 6l^2 + 4l) r_b^{2l-3} r_a^{2p+1} \cos(\phi_{0,1,3}) - x((12l + 18) r_a^{l+p+2} r_b^{l+p+2} + 2 r_a^{l+p+3} r_b^{l+p+3} \\
 & \cos((n+3)\phi_{0,1,-1}) + (30l^2 + 60l + 36) r_a^{l+p+1} r_b^{l+p+1} \cos((n+1)\phi_{0,1,-1}) + (40l^3 + 60l^2 + 44l \\
 & + 12) r_a^{l+p} r_b^{l+p} \cos(n\phi_{0,1,-1}) + (12l + 18) r_a^{l+p+2} r_b^{l+p+2} \cos((n+2)\phi_{0,1,-1}) + (40l^3 + 60l^2 + 44l \\
 & + 12) r_a^{l+p} r_b^{l+p} + (30l^2 + 60l + 36) r_a^{l+p+1} r_b^{l+p+1} + 6l r_a^{l+p+2} r_b^{l+p} \cos(\phi_{0,n+2,-(n-2)}) + (2l^3 - 6l^2 \\
 & + 4l) r_a^{l+p} r_b^{l+p-2} \cos(\phi_{0,-(n-4),n}) + 6l r_a^{l+p} r_b^{l+p+2} \cos(\phi_{0,n-2,-(n+2)}) + 2l^2(l-1)^2(l-2)^2 r_a^{l+p-3} \\
 & r_b^{l+p-3} \cos((n-3)\phi_{0,1,-1}) + 2 r_a^{l+p+1} r_b^{l+p+1} \cos((n-1)\phi_{0,1,-1}) + 2 r_a^{l+p+3} r_b^{l+p+1} \cos(\phi_{0,n+3,-(n-1)}) \\
 & + 2 r_a^{l+p+1} r_b^{l+p+3} \cos(\phi_{0,n-1,-(n+3)}) + (12l^5 - 30l^4 + 24l^3 - 6l^2) r_a^{l+p-2} r_b^{l+p-2} \cos((n-2)\phi_{0,1,-1}) \\
 & + (6l^2 - 6l) r_a^{l+p-1} r_b^{l+p+1} \cos(\phi_{0,n-3,-(n-1)}) + (30l^4 + 6l^2) r_a^{l+p-1} r_b^{l+p-1} \cos((n-1)\phi_{0,1,-1}) \\
 & + 6l(l-1) r_a^{l+p+1} r_b^{l+p-1} \cos(\phi_{0,n-1,-(n+3)}) + (2l^3 - 6l^2 + 4l) r_a^{l+p} r_b^{l+p-2} \cos(\phi_{0,n,-(n-4)}),
 \end{aligned} \tag{14}$$

với  $n = l - p$ . Bây giờ ta sẽ khảo sát các trường hợp cụ thể như sau:

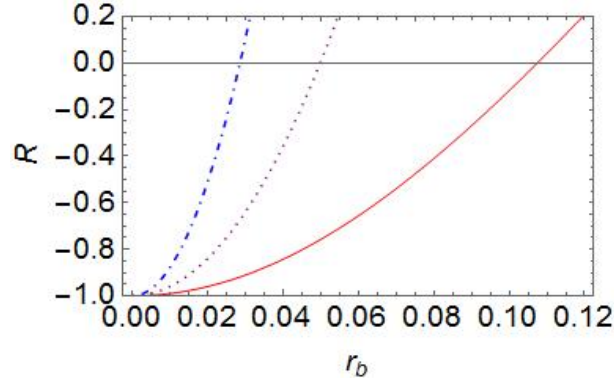
a) Trường hợp  $(l = 4, p = 3)$ ;  $(l = 5, p = 3)$ ;  $(l = 6, p = 3)$ , với cùng điều kiện khảo sát là  $r_b = r_a^3$ ,  $\varphi = \varphi_a = 0$  và  $\varphi_b = \frac{\pi}{4}$ .



Hình 4: Khảo sát sự phụ thuộc của  $R(4,3)$  "đường liền nét",  $R(5,3)$  "đường chấm chấm",  $R(6,3)$  "đường chấm gạch" vào biên độ  $r_b$  của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng.

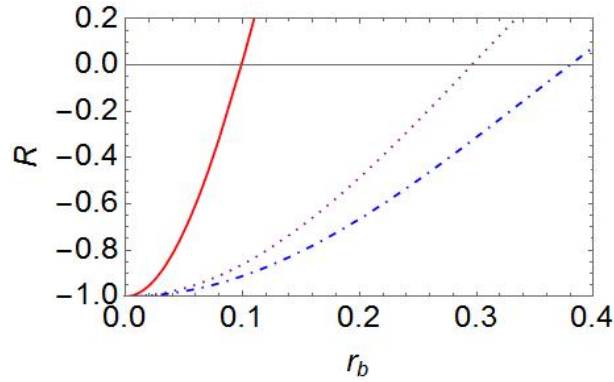
b) Tương tự, ta xét các trường hợp  $(l = 4, p = 2)$ ;  $(l = 5, p = 2)$ ;  $(l = 6, p = 2)$ , với cùng điều kiện khảo sát là  $r_b = r_a^3$ ,  $\varphi = \varphi_a = 0$  và  $\varphi_b = \frac{\pi}{4}$ .





Hình 5: Khảo sát sự phụ thuộc của  $R(4,2)$  "đường liền nét",  $R(5,2)$  "đường chấm chấm",  $R(6,2)$  đường "đường chấm gạch" vào biên độ  $r_b$  của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng.

c) Với điều kiện khảo sát là  $r_a = r_b$ ,  $\varphi = \varphi_a = 3\varphi_b$  và  $\varphi_b = \frac{\pi}{3}$ , ta xét các trường hợp  $(l=3, p=2)$ ,  $(l=5, p=4)$  và  $(l=6, p=5)$ .



Hình 6: Khảo sát sự phụ thuộc của  $R(3,2)$  "đường liền nét",  $R(5,4)$  "đường chấm chấm",  $R(6,5)$  đường "đường chấm gạch" vào biên độ  $r_b$  của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng.

Nhìn vào ba đồ thị 4, 5 và 6 ta nhận thấy tham số  $R\{l, p\}$  đều xuất phát từ giá trị  $-1$ , đây là giá trị cực tiểu của nó, tham số  $R\{l, p\} < 0$  khi các tham số  $r_a, r_b$  rất bé, và khi các tham số  $r_a, r_b$  tăng thì tham số  $R\{l, p\}$  dần tiến đến 0 và nếu tham số  $r_a, r_b$  lớn hơn một giá trị nào đó thì  $R\{l, p\} \geq 0$ . Các kết quả này chứng tỏ trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng có tính chất phản kết chùm khi các tham số  $r_a, r_b$  rất bé, nghĩa là trạng thái đó mang tính chất phi cổ điển. Trong trường hợp  $r_a, r_b$  tăng dần thì tham số  $R\{l, p\}$  cũng tăng dần đến 0, khi đó tính chất phi cổ điển của trạng thái

dần biến mất. Nếu tiếp tục tăng  $r_a, r_b$  vượt qua một giá trị giới hạn nào đó thì tham số  $R\{l, p\} \geq 0$ , nghĩa là tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng không còn, thay vào đó trạng thái mang tính chất cổ điển.

#### 4 KẾT LUẬN

Bài báo này trình bày kết quả khảo sát tính chất nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và tính phản kết chùm bậc cao của trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng. Qua quá trình khảo sát, tính toán và vẽ đồ thị thông qua các tham số, chúng tôi thu được kết quả như sau:

Thứ nhất, kết quả khảo sát cho thấy trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng thể hiện tính chất nén tổng hai mode mạnh và hoàn toàn không có tính chất nén hiệu hai mode.

Thứ hai, thông qua tham số  $I$  dựa vào điều kiện vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz đã được đưa ra và khảo sát chi tiết và cụ thể. Kết quả cho thấy trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng hoàn toàn vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz nghĩa là tính chất phi cổ điển thể hiện tương đối mạnh. Ngoài ra, khi khảo sát tính chất phản kết chùm, chúng tôi cũng đã đưa ra biểu thức tổng quát cho tham số phản kết chùm trong trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng. Qua đó, chúng tôi đã khảo sát cho từng trường hợp cụ thể và kết quả là trạng thái hai mode kết hợp phản đối xứng thêm ba và bớt một photon tổng thể hiện tính chất phản kết chùm bậc thấp và bậc cao, trong đó số bậc càng tăng nhưng hiệu các bậc càng bé thì tính chất phản kết chùm càng thể hiện rõ rệt hơn.

#### LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOS-TED) trong đề tài mã số 103.01-2018.361.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] L. L. Hou, X. F. Chen, X. F. Xu (2015), "Continuous-variable quantum teleportation with non-Gaussian entangled states generated via multiple-photon subtraction and addition", *Physical Review A*, **91**, 063832.
- [2] X. W. Xu, H. Wang, J. Zhang, Y. Liu (2013), "Engineering of nonclassical motional states in optomechanical systems", *Physical Review A*, **88**, 063819.
- [3] G. S. Agarwal and K. Tara (1991), "Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state", *Physical Review A*, **43**, 492.

- [4] S. Sivakumar (1999), "Photon-added coherent states as nonlinear coherent states", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 3441.
- [5] T. M. Duc and J. Noh (2008), "Higher-order properties of photon-added coherent states", *Opt. Commun.* **281**, 2842.
- [6] C. N. Benlloch, R. G. Patron, J. H. Shapiro, N. J. Cerf (2012), "Enhancing quantum entanglement by photon addition and subtraction", *Phys. Rev. A* **86**, 012328.
- [7] Nguyễn Vũ Thụy (2017), Luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.
- [8] Nguyễn Thị Thanh Hương (2019), Luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.
- [9] M. Hillery (1989), "Sum and difference squeezing of the electromagnetic field", *Physical Review A*, **40**, 3147.
- [10] C. T. Lee (1990), "Many-photon antibunching in generalized pair coherent states", *Physical Review A*, **41**, 1569.

**Title:** NONCLASSICAL PROPERTIES OF THE THREE-PHOTON-ADDED AND ONE-PHOTON-SUBTRACTED TWO-MODE ODD COHERENT STATE

**Abstract:** In the paper, we consider the lower-order and higher-order nonclassical properties of the three-photon-added and one-photon-subtracted two-mode odd coherent state as two-mode sum squeezing, two-mode difference squeezing, violation of the Cauchy-Schwarz inequality, and two-mode higher-order antibunching. The results show that this state exhibits two-mode sum squeezing but does not exhibit two-mode difference squeezing. In addition, this state violates the Cauchy-Schwarz inequality and becomes nonclassical state. We also show that the three-photon-added and one-photon-subtracted two-mode odd coherent state appears two-mode higher-order antibunching in any order, and the degree of antibunching becomes more and more pronounced when increasing the higher-order.

**Keywords:** Sum squeezing, difference squeezing, violation Cauchy-Schwarz inequality, two-mode antibunching.