TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 16, Số 12 (2019): 975-981

Vol. 16, No. 12 (2019): 975-981

ISSN: 1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

NHÓM CON CỦA NHÓM NHÂN TRONG VÀNH CHIA QUATERNION THỰC

Lê Văn Chua

Trường Đại học An Giang

Tác giả liên hệ: Lê Văn Chua – Email: lvchua.tag@moet.edu.vn

Ngày nhận bài: 06-11-2019; ngày nhận bài sửa: 27-11-2019; ngày duyệt đăng: 29-11-2019

TÓM TẮT

Cho $\mathbb{H}$ một vành chia quaternion thực và $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ là một nhóm nhân trong $\mathbb{H}$. Một nhóm con N của $\mathbb{H}^*$ được gọi là gần á chuẩn tắc nếu tồn tại một dãy các nhóm con

$$N = N_n \leq N_{n-1} \leq N_{n-2} \leq \cdots \leq N_2 \leq N_1 \leq N_0 = \mathbb{H}^*$$

sao cho với mỗi $0 \leq i < n,$ hoặc N_{i+1} là nhóm con chuẩn tắc của N_i hoặc N_{i+1} có chỉ số hữu hạn trong N_i. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ đều là nhóm con chuẩn tắc.

Từ khóa: vành chia; vành chia quaternion thực; nhóm con gần á chuẩn tắc

1. Giới thiệu

Cho G là một nhóm. Một nhóm con N của G được gọi là *á chuẩn tắc* trong G nếu tồn tại một dãy các nhóm con

$$N = N_n \lhd N_{n-1} \lhd N_{n-2} \lhd \cdots \lhd N_2 \lhd N_1 \lhd N_0 = G,$$

và N là *gần á chuẩn tắc* trong G nếu tồn tại một dãy các nhóm con

$$N = N_n \leq N_{n-1} \leq N_{n-2} \leq \cdots \leq N_2 \leq N_1 \leq N_0 = G$$

sao cho với mỗi $0 \leq i < n,$ hoặc N_{i+1} là nhóm con chuẩn tắc của N_i hoặc N_{i+1} có chỉ số hữu hạn trong N_i. Dãy các nhóm con này được gọi là *dãy gần chuẩn tắc* của N trong G (Hartley, 1989). Nếu r là số nhỏ nhất thỏa mãn dãy trên thì r được gọi là *chiều dài* của N trong $G.$ Theo định nghĩa trên, ta dễ dàng nhận thấy rằng mọi nhóm con á chuẩn tắc của một nhóm đều là nhóm con gần á chuẩn tắc. Lớp các nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát đã được nghiên cứu đầu tiên bởi Wehfritz (1993). Gần đây, các tác giả Nguyen, Mai và Bui (2017) đã chứng minh được rằng, nếu D là một vành chia với tâm vô

Cite this article as: Le Van Chua (2019). Subgroups of the multiplicative group of the division ring of real quaternions. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 16*(12), 975-981.

hạn và n là số nguyên dương lớn hơn 1 thì mọi nhóm con gần á chuẩn tắc trong $GL_n(D)$ là chuẩn tắc. Tuy nhiên, với $n = 1,$ tức là với nhóm nhân $GL_1(D) = D^*$ của vành chia D thì kết quả này không còn đúng nữa. Cụ thể là có nhiều lớp vành chia chứa nhóm con gần á chuẩn tắc nhưng không chuẩn tắc. Greenfield (1978) đã xây dựng một nhóm con á chuẩn tắc (do đó gần á chuẩn tắc) trong một vành chia, nhưng không chuẩn tắc. Các tác giả Trinh, Mai và Bui (2019) đã xây dựng ví dụ về một nhóm con gần á chuẩn tắc trong một vành chia, nhưng không á chuẩn tắc và do đó không chuẩn tắc. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chứng minh mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân trong vành chia quaternion thực đều là chuẩn tắc.

Các kí hiệu trong bài báo này là các kí hiệu thường dùng. Chẳng hạn, nếu D là vành chia thì $Z(D)$ được kí hiệu là tâm của D, tức là $Z(D)$ gồm các phần tử giao hoán với các phần tử còn lại trong D, tập hợp $D^* = D \setminus \{0\}$ là một nhóm nhân của D. Giả sử G là một nhóm con của D^*. Ta nói rằng G là nhóm con *trung tâm* nếu $G \subseteq Z(D)$.

2. Vành chia quaternion thực

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số kết quả liên quan tới vành chia quaternion thực sẽ được sử dụng trong Mục 3. Tập tất cả các quaternion thực được kí hiệu bởi

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

trong đó $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ và $ri = ir,\ rj = jr,\ rk = kr$ với mọi $r \in \mathbb{R}$. Chú ý rằng

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

Ta có $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ và $\mathbb{H}$ là một không gian véc tơ 4 chiều trên $\mathbb{R}$ với $S = \{1, i, j, k\}$ là một cơ sở của $\mathbb{H}$ trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\alpha = a + bi + cj + dk$ và $\beta = x + yi + zj + tk$ là hai phần tử trong $\mathbb{H}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + tk)\\ &= ax - by - cz - dt + (bx + ay - dz + ct)i\\ &\quad + (cx + dy + az - bt)j + (dx - cy + bz + at)k.\end{aligned}$$

Do đó tọa độ của véc tơ $\alpha\beta$ đối với cơ sở S là

$$[\alpha\beta]_S = \begin{bmatrix} ax - by - cz - dt \\ bx + ay - dz + ct \\ cx + dy + az - bt \\ dx - cy + bz + at \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Ta gọi $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ là *liên hợp* của $\alpha = a + bi + cj + dk$ trong $\mathbb{H}$. Khi đó

$$\left[\alpha\overline{\alpha}\right]_S = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{\alpha}\alpha\right]_S = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Do đó $\alpha\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\alpha = a^2+b^2+c^2+d^2$. *Chuẩn* của $\alpha \in \mathbb{H}$ được định nghĩa bởi $N\left(\alpha\right) = \alpha\overline{\alpha}$.

Ta có

$$\left[\overline{\beta}\overline{\alpha}\right]_S = \begin{bmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & t & -z \\ -z & -t & x & -y \\ -t & z & -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax-by-cz-dt \\ -bx-ay+dz-ct \\ -cx-dy-az+bt \\ -dx+cy-bz-at \end{bmatrix}$$

Theo trên, ta có

$$\left[\overline{\alpha\beta}\right]_S = \begin{bmatrix} ax-by-cz-dt \\ -bx-ay+dz-ct \\ -cx-dy-az+bt \\ -dx+cy-bz-at \end{bmatrix}$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\overline{\alpha\beta} = \overline{\beta}\overline{\alpha}$. Ta có

$$\begin{aligned} N\left(\alpha\beta\right) &= \alpha\beta\,\overline{\alpha\beta} \\ &= \alpha\beta\overline{\beta}\overline{\alpha} \\ &= \alpha N\left(\beta\right)\overline{\alpha} \\ &= \alpha\overline{\alpha}N\left(\beta\right) \\ &= N\left(\alpha\right)N\left(\beta\right) \end{aligned}$$

với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$. Chú ý rằng, nếu $\alpha \in \mathbb{H}^*$ thì $\alpha^{-1} = \dfrac{\overline{\alpha}}{N\left(\alpha\right)}$. Do đó

$$N\left(\alpha^{-1}\right) = N\left(\frac{\overline{\alpha}}{N\left(\alpha\right)}\right) = \frac{N\left(\overline{\alpha}\right)}{N\left(\alpha\right)^2} = \frac{N\left(\alpha\right)}{N\left(\alpha\right)^2} = \frac{1}{N\left(\alpha\right)} = N\left(\alpha\right)^{-1}.$$

Đặt $G_0 = \left\{\alpha \in \mathbb{H}^* \mid N\left(\alpha\right) = 1\right\}$. Rõ ràng $1 \in G_0$. Với mọi α và β thuộc G_0, ta có

$$N\left(\alpha\beta^{-1}\right) = N\left(\alpha\right)N\left(\beta^{-1}\right) = N\left(\alpha\right)N\left(\beta\right)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$$

và do đó $\alpha\beta^{-1} \in G_0$. Vậy G_0 là một nhóm con của $\mathbb{H}^*$.

Với mọi $\alpha \in G_0$ và $\gamma \in \mathbb{H}^*$, ta có

$$\begin{aligned} N\left(\gamma\alpha\gamma^{-1}\right) &= N\left(\gamma\right)N\left(\alpha\right)N\left(\gamma^{-1}\right) \\ &= N\left(\gamma\right) \cdot 1 \cdot N\left(\gamma^{-1}\right) \\ &= N\left(\gamma\gamma^{-1}\right) \\ &= N\left(1\right) = 1. \end{aligned}$$

Do đó $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in G_0$. Vậy G_0 là một nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$. Chú ý rằng $i \in G_0$, nhưng i không thuộc $\mathbb{R}$, do đó G_0 là nhóm con không trung tâm của $\mathbb{H}^*$. Vậy G_0 là một nhóm con chuẩn tắc không trung tâm của nhóm nhân $\mathbb{H}^*$ trong vành chia quaternion thực $\mathbb{H}$.

Trong bài báo này, ta cần đến các kết quả sau đã được chứng minh bởi Greenfield (1978).

Định lí 2.1.

Cho $\mathbb{H}$ là vành chia quaternion thực. Giả sử N và G là các nhóm con của $\mathbb{H}^*$. Khi đó

(i) G là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ nếu và chỉ nếu G là trung tâm hoặc $G \supset G_0$.

(ii) Nếu N là nhóm con chuẩn tắc của G và G là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ thì N là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$, nghĩa là, nếu $N \lhd G \lhd \mathbb{H}^*$ thì $N \lhd \mathbb{H}^*$.

3. Nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân trong vành chia quaternion thực

Trong mục này, ta sẽ chứng minh mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân trong vành chia quaternion thực là nhóm con chuẩn tắc.

Để đi đến kết luận chính của bài báo này, trước hết, ta nhắc lại khái niệm lõi của nhóm con trong một nhóm. *Lõi* của nhóm con N trong một nhóm G được định nghĩa bởi

$$\mathrm{Core}_G\left(N\right) = \bigcap_{a \in G} aNa^{-1}.$$

Chú ý rằng $\mathrm{Core}_G\left(N\right)$ là một nhóm con chuẩn tắc lớn nhất của G chứa trong N. Hơn nữa, nếu chỉ số $\left[G : N\right]$ hữu hạn thì $\left[G : \mathrm{Core}_G\left(N\right)\right]$ cũng hữu hạn. Nếu N là nhóm con chuẩn tắc có chỉ số hữu hạn trong G, nghĩa là $\left[G : N\right] = n$ thì $a^n \in N$ với mọi $a \in G$.

Tiếp theo, ta cũng cần nhắc đến khái niệm đồng nhất thức trên nhóm. Giả sử G là một nhóm với tâm $Z(G)$ là tập hợp tất cả các phần tử $a \in G$ sao cho a giao hoán với mọi phần tử $g \in G,$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n biến không giao hoán. Một biểu thức có dạng

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_{i_1}^{m_1} a_2 x_{i_2}^{m_2} \cdots a_t x_{i_t}^{m_t} a_{t+1}$$

được gọi là một *đơn thức suy rộng* trên $G,$ trong đó $a_j \in G, i_j \in \{1, 2, \dots, n\},$ nếu với mọi $j = 1, 2, \dots, t-1,$ các điều kiện $i_j = i_{j+1}$ và $m_j m_{j+1} < 0$ kéo theo $a_{j+1} \notin Z(G),$ (Golubchik, & Mikhalev, 1982; Tomanov, 1985). Giả sử N là nhóm con của $G.$ Ta nói rằng $\omega = 1$ là một *đồng nhất thức* của N hoặc N *thỏa đồng nhất thức* $\omega = 1$ trên G nếu $\omega(c_1, c_2, \dots, c_n) = 1$ với mọi $c_1, c_2, \dots, c_n \in N.$

Các tác giả Nguyen, Mai và Bui (2017) đã chứng minh kết quả sau:

Mệnh đề 3.1.

Cho D là một vành chia với tâm F vô hạn và N là một nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân D^*. Khi đó, nếu N thỏa một đồng nhất thức trên D^* thì N là trung tâm.

Bây giờ ta sẽ phát biểu và chứng minh kết quả chính của bài báo này.

Định lí 3.2.

Cho $\mathbb{H}$ là vành chia quaternion thực. Giả sử N là một nhóm con không trung tâm của $\mathbb{H}^*$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

(i) N là nhóm con gần á chuẩn tắc trong $\mathbb{H}^*$.

(ii) N là nhóm con á chuẩn tắc trong $\mathbb{H}^*$.

(iii) N là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$.

(iv) N chứa G_0.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh $(iv) \Rightarrow (iii)$. Giả sử N chứa G_0. Khi đó N là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ bởi Định lí 2.1(i). Hiển nhiên $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $(i) \Rightarrow (iv)$. Giả sử

$$N = N_n < N_{n-1} < N_{n-2} < \cdots < N_2 < N_1 < N_0 = \mathbb{H}^*$$

là dãy gần chuẩn tắc có chiều dài n của N trong $\mathbb{H}^*$. Ta sẽ chứng minh định lí bằng phương pháp quy nạp theo $n.$ Với $n = 0,$ ta có $N = \mathbb{H}^*$ chứa G_0. Vậy định lí đúng với $n = 0.$ Giả sử định lí đúng với mọi nhóm con gần á chuẩn tắc không trung tâm của $\mathbb{H}^*$ có chiều dài nhỏ hơn $n.$ Ta cần phải chứng minh định lí đúng với nhóm con gần á chuẩn tắc không trung tâm N của $\mathbb{H}^*$ có chiều dài $n.$ Ta áp dụng giả thuyết quy nạp cho nhóm con gần á chuẩn tắc không trung tâm N_{n-1} của $\mathbb{H}^*$ có chiều dài $n-1$. Khi đó N_{n-1} chứa G_0 và do đó N_{n-1} là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ bởi Định lí 2.1(i). Ta sẽ chứng minh N chứa G_0. Thật vậy, ta có N là nhóm con chuẩn tắc của N_{n-1} hoặc chỉ số $\left[N_{n-1} : N\right]$ hữu hạn. Nếu N là nhóm con chuẩn tắc của N_{n-1} thì N là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ bởi vì N_{n-1} là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ và Định lí 2.1(ii). Theo Định lí 2.1(i), ta có N chứa G_0, chứng minh kết thúc. Nếu chỉ số $\left[N_{n-1} : N\right]$ hữu hạn thì ta xét lõi $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ của N trong N_{n-1}. Khi đó $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ là một nhóm con chuẩn tắc của N_{n-1} và chỉ số $\left[N_{n-1} : \mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)\right] = m$ hữu hạn. Ta sẽ chứng minh $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ không trung tâm. Thật vậy, nếu $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ là trung tâm thì $x^m \in \mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ với mọi $x \in N_{n-1}$ và do đó $x^m y^m x^{-m} y^{-m} = 1$ với mọi $x, y \in N_{n-1}$. Khi đó N_{n-1} thỏa một đồng nhất thức trên $\mathbb{H}^*$. Theo Mệnh đề 3.1, N_{n-1} là trung tâm, điều này dẫn đến mâu thuẫn. Do đó $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ không trung tâm. Ta có $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ là nhóm con chuẩn tắc của N_{n-1} và N_{n-1} là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$. Theo Định lí 2.1(ii), $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ là một nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$. Do đó $\mathrm{Core}_{N_{n-1}}(N)$ chứa G_0 bởi Định lí 2.1(i), kéo theo N chứa G_0. Định lí được chứng minh.

Hệ quả 3.3.

Cho $\mathbb{H}$ là vành chia quaternion thực. Khi đó mọi nhóm con gần á chuẩn tắc trong $\mathbb{H}^*$ đều là nhóm con chuẩn tắc.

Chứng minh. Giả sử N là nhóm con gần á chuẩn tắc trong $\mathbb{H}^*$. Khi đó N là nhóm con trung tâm của $\mathbb{H}^*$ hoặc N là nhóm con không trung tâm của $\mathbb{H}^*$. Nếu N là nhóm con trung tâm của $\mathbb{H}^*$ thì đương nhiên N là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$. Nếu N là nhóm con không trung tâm của $\mathbb{H}^*$ thì N là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$ bởi Định lí 3.2. Cả hai trường hợp đều dẫn tới kết quả N là nhóm con chuẩn tắc của $\mathbb{H}^*$. Hệ quả đã được chứng minh.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Golubchik, I. Z., & Mikhalev, A. V. (1982). Generalized group identities in the classical groups. *Zap. Nauch. Semin. LOMI AN SSSR, 114*, 96-119.

Greenfield, G. R. (1978). A note on subnormal subgroups of division algebras. *Can. J. Math, 30*, 161-163.

Hartley, B. (1989). Free groups in normal subgroups of unit groups and arithmetic groups. *Contemp. Math, 93*, 173-177.

Hazrat, R., & Wadsworth, A. R. (2009). On maximal subgroups of the multiplicative group of a division algebra. *J. Algebra, 322*, 2528-2543.

Lam, T. Y. (1991). *A first course in noncommutative rings*. Berlin. Springer-Vetlag.

Mai, H. B. (2015). On some subgroups of D^* which satisfy a generalized group identity. *Bull. Korean Math. Soc., 52,* 1353-1363.

Nguyen, K. N., Mai, H. B., & Bui, X. H. (2017). Free subgroups in almost subnormal subgroups of general skew linear groups. *Algebra i Analiz, 28*(5)*,* 220-235, English translation in *St. Petersburg Math. J., 28*(5)*,* 707-717.

Trinh, T. D., Mai, H. B., & Bui. X. H. (2019). On division subrings normalized by almost subnormal subgroups in division rings. *Periodica Mathematica Hungarica*.

Tomanov, G. M. (1985). Generalized group identities in linear groups. *Math. USSR, Sbornik, 51*, 33-46.

Wehfritz, B. A. F. (1993). A note on almost subnormal subgroups of linear groups. *Proc. Am. Math. Soc, 117*(1), 17-21.

SUBGROUPS OF THE MULTIPLICATIVE GROUP OF THE DIVISION RING OF REAL QUATERNIONS

Le Van Chua

An Giang University

Corresponding author: Le Van Chua – Email: lvchua.tag@moet.edu.vn

Received: November 06, 2019; Revised: November 27, 2019; Accepted: November 29, 2019

ABSTRACT

Let $\mathbb{H}$ *be the division ring of real quaternions and* $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ *the multiplicative group of* $\mathbb{H}$. *A subgroup* N *of* $\mathbb{H}^*$ *is said to be almost subnormal if a sequence of subgroups exists*

$$N = N_n \leq N_{n-1} \leq N_{n-2} \leq \cdots \leq N_2 \leq N_1 \leq N_0 = \mathbb{H}^*$$

such that for any $0 \leq i < n$, N_{i+1} *is normal in* N_i *or* N_{i+1} *has the finite index in* N_i. *In this paper, we show that every almost subnormal subgroup of* $\mathbb{H}^*$ *is normal.*

Keywords: division ring; division ring of real quaternions; almost subnormal subgroup