MÔĐUN VÀ VÀNH KER-BẤT BIẾN ĐẲNG CẤU

NGUYỄN THỊ DIỄM CHI
Trường THPT Phạm Phú Thứ, Quảng Nam

Tóm tắt: Bài báo này giới thiệu về môđun và vành ker-bất biến đẳng cấu. Một R-môđun M sao cho hạt nhân của các tự đồng cấu của M bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của M; nghĩa là với mọi $f \in End(M)$, $\alpha(ker(f)) \leq ker(f)$, $\forall \alpha \in Aut(M)$, được gọi là môđun ker-bất biến đẳng cấu. Vành R mà R_{R} là ker-bất biến đẳng cấu thì được gọi là vành ker-bất biến đẳng cấu. Trong bài báo này, chúng tôi thu được một số tính chất của môđun và vành ker-bất biến đẳng cấu, đưa ra một số ví dụ về môđun ker-bất biến đẳng cấu.

Từ khóa: Môđun ker-bất biến đẳng cấu, vành abelian, vành nửa giao hoán.

1 GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, R là vành kết hợp có đơn vị. Cho tập khác rỗng $S \subseteq R$, $l_R(S), r_R(S)$ lần lượt là linh hóa tử trái và linh hóa tử phải của S trong R. Căn Jacobson, nhóm các phần tử khả nghịch, tập tất cả các phần tử lũy đẳng của R được ký hiệu lần lượt là $J(R)$, $U(R)$ và $Id(R)$. Môđun con suy biến của M được ký hiệu là $Z(M)$. Vành các tự đồng cấu của M và nhóm các tự đẳng cấu của M được ký hiệu lần lượt là $End(M)$ và $Aut(M)$. Một môđun M là *S-tựa Baer chính* (hoặc *S-p.q.-Baer*) nếu $m \in M$, $l_S(m) = Se$ với $e^2 = e \in S = End(M)$. Một R-môđun M được gọi là môđun *duo* (*duo yếu*) nếu mỗi môđun con (t.ứ. hạng tử trực tiếp) của M là bất biến qua tất cả các tự đồng cấu của M. Một môđun M được gọi là môđun đều nếu mọi môđun con khác 0 của M cốt yếu trong M. Vành R được gọi là *abelian* nếu mọi lũy đẳng thuộc tâm.

Năm 2012, các tác giả Singh và Srivastava ([12]) đã giới thiệu khái niệm môđun đối bất biến đẳng cấu. Họ đã chứng minh được: Cho $P \to M$ là một phủ xạ ảnh của M, khi đó M là đối bất biến đẳng cấu nếu và chỉ nếu $ker(P \to M)$ bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của P. Từ khái niệm này, các tác giả Quynh, Chi, Nhan và Kosan ([10]) đã giới thiệu khái niệm về môđun và vành mà hạt nhân của mỗi tự đồng cấu là bất biến qua các tự đẳng

Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Huế, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 03(51)/2019: tr. 32-39
Ngày nhận bài: 18/4/2019; Hoàn thành phản biện: 28/5/2019; Ngày nhận đăng: 01/7/2019

cấu. Môđun thỏa mãn điều kiện này được gọi là môđun ker-bất biến tự đẳng cấu. Các tác giả đã đưa ra nhiều kết quả đặc trưng cho các lớp vành và môđun thỏa điều kiện trên. Tuy nhiên một số ví dụ và một số tính chất về môđun ker-bất biến đẳng cấu đã được đưa ra nhưng chưa chứng minh cụ thể. Trong bài báo này tôi sẽ làm rõ các ví dụ và chứng minh chi tiết một số tính chất đó đồng thời đưa ra một số tính chất khác của vành ker-bất biến đẳng cấu.

2 MÔĐUN VÀ VÀNH KER-BẤT BIẾN ĐẲNG CẤU

Nhắc lại rằng, một R-môđun M được gọi là ker-bất biến đẳng cấu nếu hạt nhân của tất cả các tự đồng cấu của M bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của M. Một vành R được gọi là ker-bất biến đẳng cấu nếu R_{R} là ker-bất biến đẳng cấu. Sau đây chúng tôi sẽ làm rõ các ví dụ về môđun ker-bất biến đã được đưa ra trong tài liệu [10].

Ví dụ 2.1.

(1) Nếu vành các tự đồng cấu của M chính quy mạnh thì M là ker-bất biến đẳng cấu. Điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát. Tuy nhiên, vành các tự đồng cấu của M là chính quy mạnh khi nó là vành chính quy và M là ker-bất biến đẳng cấu. Thật vậy, nếu $End(M)$ chính quy mạnh thì $End(M)$ chính quy và abelian.

$*$ $End(M)$ là chính quy nên với $\alpha \in End(M)$, $k\mathrm{er}(\alpha) \leq M$ nên $k\mathrm{er}(\alpha) {\leq}^e M$, do đó tồn tại $e \in End(M) : e^2 = e$ và $ker(\alpha) = e(M)$; với mọi $u \in Aut(M)$ ta có: $uk\mathrm{er}(\alpha) = ue(M)$. $End(M)$ là abelian nên $eu = ue$ hay $uk\mathrm{er}(\alpha) = ue(M) = eu(M) \leq e(M) = k\mathrm{er}(\alpha)$, do đó M ker-bất biến đẳng cấu.

$*$ Ngược lại, M là ker-bất biến đẳng cấu, với $e = e^2 \in End(M)$, $\alpha \in End(M)$,
$1 - e\alpha(1 - e) \in Aut(M)$. Khi đó, $e(1 - e)(M) = 0$ nên $(1 - e)(M) = \ker(e)$,

$$[1 - e\alpha\,(1 - e)\,](1 - e)(M) \leq \ker(e) = (1 - e)(M)$$

suy ra e$[1 - e\alpha\,(1 - e)\,](1 - e)(M) \leq e(1 - e)(M) = 0$, do đó $e\alpha(1 - e) = 0$ hay $e\alpha = e\alpha e$, tương tự $\alpha e = e\alpha e$ hay $End(M)$ là abelian. Vậy $End(M)$ chính quy và abelian nên $End(M)$ chính quy mạnh.

(2) $\mathbb{Z}$-môđun$\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (Prüfer group) là ker-bất biến đẳng cấu. Thật vậy, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ là $\mathbb{Z}$-môđun nội xạ nên mỗi môđun con K của $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ là tựa nội xạ, với mọi $\alpha \in End(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ ta có $\alpha(K) \leq K$ hay $uk\mathrm{er}(\alpha) \leq k\mathrm{er}(\alpha)$ với mọi $u \in Aut(\mathbb{Z}_{p^\infty})$.

(3) Mỗi môđun đều không suy biến là ker-bất biến đẳng cấu. Thật vậy, với $f \in End(M)$, $ker(f) \neq 0$ ($ker(f) = 0$ tầm thường) thì $\ker(f) {\leq}^e M$ nên $Z\,(M/\ker(f)) = M/\ker(f)$, lại có $M/\ker(f) \cong im(f)$ nên $Z\,(M/\ker(f)) = Z(im(f))$ suy ra $im(f) = Z(im(f))$, mà $im(f) \leq M$ nên $Z(imf) \leq Z\,(M) = 0$, do đó $im(f) = 0$, như vậy $M/\ker(f) \cong 0$ hay $M = ker(f)$, khi đó $uker(f) \leq M = ker(f)$.

(4) Mỗi miền D là ker-bất biến đẳng cấu (vì với mỗi $a \in D$, $r_D(a) = 0$).

(5) M là một môđun duo thì M là ker-bất biến đẳng cấu. (Theo định nghĩa của môđun duo).

Sau đây là một số tính chất cơ bản của môđun ker-bất biến đẳng cấu.

Mệnh đề 2.2. *Mỗi hạng tử trực tiếp của môđun ker-bất biến đẳng cấu là ker-bất biến đẳng cấu.*

Chứng minh. Gọi N là hạng tử trực tiếp của M, khi đó $M = N \oplus N'$.

Lấy bất kỳ $\alpha \in End(N)$ và $u \in Aut(N)$, khi đó $\alpha \oplus 1_{N'} \in End(M)$ và $u \oplus 1_{N'} \in Aut(M)$, trong đó

$$\begin{aligned} \alpha \oplus 1_{N'} : M = N \oplus N' &\to M = N \oplus N' \\ n + n' &\mapsto \alpha(n) + n' \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} u \oplus 1_{N'} : M = N \oplus N' &\to M = N \oplus N' \\ n + n' &\mapsto u(n) + n' \end{aligned}$$

Ta có:

$$k\mathrm{er}(\alpha \oplus 1_{N'}) = \{\mathrm{n} + \mathrm{n}'/\alpha(\mathrm{n}) + \mathrm{n}' = 0\} = \ker(\alpha)$$

và M là ker-bất biến đẳng cấu nên

$$(u \oplus 1_{N'})ker(\alpha \oplus 1_{N'}) \leq ker(\alpha \oplus 1_{N'}) = ker(\alpha)$$

mà

$$(u \oplus 1_{N'})ker(\alpha \oplus 1_{N'}) = (u \oplus 1_{N'})(ker\alpha + 0) = ker(\alpha)$$

nên

$$uker(\alpha) \leq ker(\alpha).$$

Vậy N là ker-bất biến đẳng cấu. □

Hạng tử trực tiếp của một môđun ker-bất biến đẳng cấu là một môđun ker-bất biến đẳng cấu, điều ngược lại chưa chắc đúng. Tuy nhiên trong một số trường hợp đặc biệt thì điều đó đúng và được thể hiện ở mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.3. *Cho $M = M_1 \oplus M_2$, M_1 và M_2 là các môđun ker-bất biến đẳng cấu. Nếu $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ với $1 \leq i \neq j \leq 2$, thì M là ker-bất biến đẳng cấu.*

Chứng minh. Với $f \in End(M)$, $f_1 \in End(M_1)$, $f_2 \in End(M_2)$, $u \in Aut(M)$, $u_1 \in Aut(M_1)$, $u_2 \in Aut(M_2)$, vì $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ với $1 \leq i \neq j \leq 2$ nên ta có

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}; \;\; u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

Nếu $(m_1, m_2) \in ker(f)$ thì $m_1 \in ker(f_1)$ và $m_2 \in ker(f_2)$, khi đó $u_1 m_1 \in ker(f_1)$ và $u_2 m_2 \in ker(f_2)$. Do đó

$$u(m_1, m_1) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 m_1 & 0 \\ 0 & u_2 m_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} f_1 m_1 & 0 \\ 0 & f_2 m_2 \end{pmatrix}$$

hay $uker(f) \leq ker(f)$. □

Từ mệnh đề trên ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.4. *Cho $M = M_1 \oplus M_2$. Nếu M là duo yếu, M_1 và M_2 là các môđun ker-bất biến đẳng cấu thì M là ker-bất biến đẳng cấu.*

Trong [10] đã đưa ra một số điều kiện tương đương với tính ker-bất biến qua các tự đẳng cấu của môđun M nhưng chưa chứng minh, tiếp theo đây chúng tôi sẽ chứng minh cụ thể các điều kiện tương đương đó.

Bổ đề 2.5. *Cho R-môđun phải M, $S = End(M)$, $U = Aut(M)$. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(1) M là môđun ker-bất biến đẳng cấu.
(2) Với bất kỳ $\alpha \in S$, $U \ker(\alpha) = \ker(\alpha)$.
(3) Với bất kỳ tập con $I \neq \emptyset$ của S, $U \ker(I) = \ker(I)$.
(4) $l_S(m)U = l_S(m)$ với bất kỳ $m \in M$.
(5) Với bất kỳ tập con $N \neq \emptyset$ của S, $l_S(N)U = l_S(N)$.
(6) Nếu $\alpha(m) = 0$, $\forall \alpha \in S, m \in M$ thì $\alpha U m = 0$.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2). Lấy bất kỳ $u \in U$ và $\alpha \in S$. Vì M ker-bất biến đẳng cấu nên $uker(\alpha) \leq ker(\alpha)$ với mọi $u \in U$, do đó $Uker(\alpha) \leq ker(\alpha)$. Hiển nhiên $ker(\alpha) \leq Uker(\alpha)$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Rõ ràng.
(2) $\Rightarrow$ (3). Với $m \in \ker(I)$, $m \in \bigcap_{\alpha \in I} \ker(\alpha)$ hay $m \in ker(\alpha)$ với mọi $\alpha \in I$, suy ra $u(m) \in ker(\alpha)$ với mọi $u \in U$ nên $Uker(I) \leq ker(\alpha)$, do đó $Uker(I) \leq \bigcap_{\alpha \in I} \ker(\alpha) = ker(I)$. Hiển nhiên $ker(I) \leq Uker(I)$.
(3) $\Rightarrow$ (2). Với $\alpha \in S$, lấy $I = \{\alpha\}$.
(1) $\Rightarrow$ (4). Lấy bất kỳ $a \in l_S(m)U$, $a = \alpha u$ (với $u \in U$ và $\alpha \in l_S(m)$). Vì $\alpha \in l_S(m)$ nên $\alpha m = 0$, $m \in ker(\alpha)$ nên $u(m) \in ker(\alpha)$. Vì $a \in l_S(m)U$ nên $am = \alpha u m = 0$ hay $a \in l_S(m)$, do đó $l_S(m)U \leq l_S(m)$. Chiều ngược lại hiển nhiên.
(4) $\Rightarrow$ (1). Với mọi $m \in ker(\alpha)$, $\alpha \in l_S(m)$. Vì $l_S(m)U = l_S(m)$ nên $\alpha u(m) = 0$ với mọi

$u \in U$, do đó $u(m) \in ker(\alpha)$ với mọi $m \in ker(\alpha)$ hay $uker(\alpha) \leq ker(\alpha)$.
(1) $\Rightarrow$ (5). Lấy bất kỳ $b \in l_S(N)U$, $b = \alpha u$ trong đó $\alpha \in l_S(N), u \in U$. Vì $\alpha \in l_S(N)$ nên $\alpha f = 0$ với mọi $f \in N$, $f \in ker(\alpha)$ nên $uf \in ker(\alpha)$ suy ra $bf = \alpha uf = 0$ với mọi $f \in N$ hay $b \in l_S(N)$, do đó $l_S(N)U \leq l_S(N)$. Chiều ngược lại hiển nhiên.
(5) $\Rightarrow$ (1). Lấy bất kỳ $f \in S$, đặt $N = \{f\}$ ta có $l_S(f)U = l_S(f)$. Với bất kỳ $\alpha \in l_S(f)$, $\alpha f = 0$ hay $\alpha f(m) = 0$ với mọi $m \in M$, suy ra $f(m) \in \ker(\alpha)$, mà $l_S(f)U = l_S(f)$ nên $\alpha uf(m) = 0$ suy ra $uf(m) \in ker(\alpha)$ hay $uker(\alpha) \leq ker(\alpha)$.
(4) $\Rightarrow$ (6). Lấy bất kỳ $\alpha \in S$, $m \in M$, $\alpha(m) = 0$ suy ra $\alpha \in l_S(m)$, mà $l_S(m) = l_S(m)U$ nên $\alpha Um = 0$.
(6) $\Rightarrow$ (1). Lấy bất kỳ $\alpha \in S, m \in ker(\alpha)$, nếu $\alpha(m) = 0$ thì $\alpha Um = 0$ suy ra $u(m) \in ker(\alpha)$ với mọi $u \in U$, do đó $uker(\alpha) \leq ker(\alpha)$.

□

Hệ quả 2.6. *Đối với vành R, các phát biểu sau tương đương:*
(1) R là vành ker-bất biến đẳng cấu phải.
(2) Với bất kỳ $x \in R$, $U(R)r_R(x) = r_R(x)$.
(3) $l_R(x)U(R) = l_R(x)$, $\forall x \in R$.
(4) Với bất kỳ $x \in R$, $U(R)r_R(x) = r_R(x)U(R)$.
(5) $l_R(x)U(R) = U(R)l_R(x)$, $\forall x \in R$.
(6) Với bất kỳ tập con $I \neq \emptyset$ của R, $U(R)r_R(I) = r_R(I)$.
(7) Với bất kỳ tập con $I \neq \emptyset$ của R, $l_R(I)U(R) = l_R(I)$.
(8) Nếu $xy = 0$ $\forall x, y \in R$ thì $xU(R)y = 0$.
(9) Với bất kỳ iđêan trái H và iđêan phải K của R, nếu $HK = 0$ thì $HU(R)K = 0$.

Từ hệ quả trên, ta có:

Định lý 2.7. *[10] R là vành ker-bất biến đẳng cấu phải nếu và chỉ nếu R là vành ker-bất biến đẳng cấu trái.*

Hệ quả 2.8. *Nếu M là môđun ker-bất biến đẳng cấu thì* $\mathrm{End}(M)$ *là vành ker-bất biến đẳng cấu.*

Chứng minh. Với bất kỳ $f, g \in End(M)$ thỏa $fg = 0$. Ta có: $fg(m) = 0$ với $m \in M$ nên $g(m) \in ker(f)$, suy ra $ug(m) \in ker(f)$ với mọi $u \in Aut(M)$, do đó $fug(m) = 0$ với mọi $m \in M$, hay $fUg = 0$. Vậy $End(M)$ là vành ker-bất biến đẳng cấu. □

Nếu M là ker-bất biến đẳng cấu thì $End(M)$ là ker-bất biến đẳng cấu, chiều ngược lại chưa biết đúng hay không?! Tuy nhiên trong trường hợp cụ thể thì chiều ngược lại đúng.

Mệnh đề 2.9. *Cho R-môđun M, $S = End(M)$.*
(1) Giả sử S là ker-bất biến đẳng cấu, với mỗi $m \in M$, tồn tại $g \in S$ sao cho $g(M) = mR$

thì M là ker-bất biến đẳng cấu.
(2) Nếu M là một S-p.p và S là ker-bất biến đẳng cấu thì M là ker-bất biến đẳng cấu.

Chứng minh.

(1) Với $m \in M$, $f \in S$, $m \in ker(f)$, ta có $fg(M) = f(mR) = f(m)R = 0$, hay $fg = 0$, suy ra $fug = 0$ với $u \in Aut(M)$, suy ra $fu(m) = 0$ hay $u(m) \in ker(f)$. Vậy $uker(f) \leq ker(f)$.
(2) Với $m \in M$, $\alpha(m) = 0$, $\alpha \in l_S(m) = Se = l_S(1-e)$ (với $e^2 = e \in S$), suy ra $\alpha(1-e) = 0$ nên $\alpha u(1-e) = 0$ (vì S là ker-bất biến đẳng cấu), $\alpha u \in l_S(1-e) = l_S(m)$, $\alpha u(m) = 0$ với mọi $u \in Aut(M)$, do vậy $uker(\alpha) \leq ker(\alpha)$. □

Cho hai R-môđun N và M, N được gọi là M-xạ ảnh nếu với mỗi môđun con A của M, bất kỳ đồng cấu từ N vào M/A có thể nâng thành đồng cấu từ N vào M. Bất kỳ hai môđun N và M được gọi là xạ ảnh tương hỗ nếu N là M-xạ ảnh và M là N-xạ ảnh.

Mệnh đề 2.10. *Cho M là môđun ker-bất biến đẳng cấu, $x_1, x_2 \in S = End(M)$ and $e^2 = e \in S$ sao cho $e(M)$ xạ ảnh. Nếu $ker(x_1) \leq e(M)$ và $ker(x_2) \leq (1-e)(M)$ thì $e(M)/ker(x_1)$ và $(1-e)(M)/ker(x_2)$ là xạ ảnh tương hỗ.*

Chứng minh.

Đặt $M_1 := e(M)/ker(x_1)$, $M_2 := (1-e)(M)/ker(x_2)$, $K := ker(x_1) \oplus ker(x_2)$,
$\bar{L} = L/ker(x_2) \leq M_2$. Xét dãy khớp:

$$M_2 \to M_2/\bar{L} \to 0$$

và đồng cấu $\lambda : M_1 \to M_2/\bar{L}$.
Vì $M_2/\overline{L} = ((1-e)(M)/\mathrm{ker}(x_2)) / (L/\mathrm{ker}(x_2)) \cong (1-e)(M)/L$ nên xác định được:

$$\lambda' : M_1 = e(M)/\mathrm{ker}(x_1) \to (1-e)(M)/L.$$

Vì $e(M)$ xạ ảnh nên tồn tại đồng cấu :

$$\mu : e(M) \to (1-e)(M)$$

sao cho

$$\lambda' p_1 = p_2 \mu$$

trong đó

$$\begin{aligned} p_1 : e(M) &\to e(M)/\mathrm{ker}(x_1) \\ x &\mapsto x + \mathrm{ker}(x_1) \\ p_2 : (1-e)(M) &\to (1-e)(M)/L \\ \alpha &\mapsto \alpha + L \end{aligned}$$

Đặt $H := \{x + \mu(x), x \in e(M)\}$. Khi đó $M = H \oplus (1-e)(M)$

Xét:

$$\begin{aligned} \delta : M &\to M \\ m &\mapsto em + \mu(em) + (1-e)m = m + \mu(em) \end{aligned}$$

δ là một đẳng cấu, M là môđun ker-bất biến đẳng cấu nên: $K = \delta(K)$ và $K = \delta^{-1}(K)$.

Xét

$$\begin{aligned} \delta' : (e(M)+K)/K &\to (H+K)/K \\ x + K &\mapsto \delta(x) + K = x + \mu(x) + K \end{aligned}$$

do $\delta(x)$ là đồng cấu nên δ' cũng là đồng cấu, $\delta'(x+K) = \delta(x) + K = 0$, $\delta(x) \in K$ do đó $x \in K$ nên δ' là đơn cấu và với mọi $h \in (H+K)/K, h = x + \mu(x) + K = \delta'(x)$ nên δ' là một đẳng cấu. Ta thấy rằng nếu $x \in K \cap e(M)$ thì $\delta'(x+K) = 0$ suy ra $x + \mu(x) \in K$ và do đó $\mu(x) \in K \cap (1-e)(M)$ nên δ' cảm sinh ánh xạ:

$$\begin{aligned} \overline{\mu} : e(M)/k\mathrm{er}(x_1) &\to (1-e)(M)/k\mathrm{er}(x_2) \\ x + k\mathrm{er}(x_1) &\mapsto \mu(x) + k\mathrm{er}(x_2) \end{aligned}$$

là mở rộng của λ' (vì $p_2\overline{\mu}(x + k\mathrm{er}(x_1)) = p_2(\mu(x) + k\mathrm{er}(x_2)) = \mu(x) + L = \lambda'(x + k\mathrm{er}(x_1))$).
Vậy $e(M)/ker(x_1)$ là $(1-e)(M)/ker(x_2)$-xạ ảnh.

Tương tự, ta cũng chứng minh được $(1-e)(M)/ker(x_1)$ và $e(M)/ker(x_2)$-xạ ảnh. □

Một môđun M được gọi là $(D3)$ nếu A và B là các hạng tử trực tiếp của M sao cho $M = A + B$ thì $A \cap B$ cũng là hạng tử trực tiếp của M. Từ chứng minh trên ta thu được kết quả sau:

Mệnh đề 2.11. *[10] Cho M là môđun ker-bất biến đẳng cấu xạ ảnh, $\alpha \in S$. Nếu lũy đẳng được nâng modulo $ker(\alpha)$ thì $\alpha(M)$ là $(D3)$-môđun.*

LỜI CÁM ƠN

Tác giả xin chân thành cám ơn GS Lê Văn Thuyết và PGS Trương Công Quỳnh đã hướng dẫn, giúp đỡ tác giả hoàn thành bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. Agrayev and A. Harmanci, *On Semicommutative Modules and Rings*, Kyungpook Math. J. 47(2007), 21-30.

[2] N. Agrayev, T. Ozen and A. Harmanci, *On a class of semicommutative modules*, Math. Sci, 2 (2009), 149-158.

[3] M. Baser, T. K. Kwak, *Extended semicommutative rings*, Algebra Colloquim, 2(2010) 257-264.

[4] W. Chen, *Units in polynomial rings over 2-primal rings*, Southeast Asian Bulletin of Mathematic 30(2006), 1049-1053.

[5] E. Ghashghaei, M. T. Kosan, T. C. Quynh and T. Yildirim, *On rings whose right annihilator of element are invariant under units*,

[6] C. Hun, Y. Lee, A. Smoktunowicz, *Armendariz rings and semicommutative rings*, Comm. Algebra, 30(2002)751-761.

[7] N. K. Kim and Y. Lee, *Extensions of reversible rings*, Algebra 185 (2003), 207-223.

[8] T. K. Lee and Y. Zhou, *Armendariz and Reduced Rings*, Comm. Algebra, 30(2004), 2287-2299.

[9] A.C. Özcan, A. Harmanci and P.F. Smith, *Duo modules*, Glasgow Math.J. 48(3) (2006), 533-545.

[10] T.C.Quynh, N.T.D.Chi, T.H.N.Nhan and M.T.Kosan, *Modules in which kernels of endomorphism invariant under all automorphism, preprint.*

[11] S.T. Rizvi and C.S. Roman, *Baer and quasi-Baer modules*, Comm. Algerbra, 32(2004), 1030-123.

[12] S. Singh and AK. Srivastava, *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra 371,(2012), 262-275.

[13] R. Wisbauer: *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach. Reading (1991).

Title: ON AUTOMORPHISM KER-INVARIANT MODULES AND RINGS

Abstract: In this paper, we introduce a new class of modules and rings which are automorphisms ker-invariant. A right R-module M is called automorphism ker-invariant if the kernel of all endomorphisms of M are invariant under all automorphisms of M; i.e., for every $f \in End(M)$, $\alpha(ker(f)) \leq ker(f)$, $\forall \alpha \in Aut(M)$.

Many properties and examples of automorphisms ker-invariant modules and related ring were obtained.

Keywords: Automorphisms ker-invariant module, abelian ring, semicommutative ring.