

Phân tích động lực học vết nứt trong vật liệu lẫn hạt cứng và lỗ rỗng bằng phương pháp phần tử hữu hạn nội suy liên tiếp mở rộng

Trương Tích Thiện^{1*}, Trần Kim Bằng¹, Phan Ngọc Nhân¹, Bùi Quốc Tính²

¹Trường Đại học Bách khoa, Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh

²Khoa Xây dựng Dân dụng và Môi trường, Viện Công nghệ Tokyo, Nhật Bản

Ngày nhận bài 25/1/2019; ngày chuyển phản biện 31/1/2019; ngày nhận phản biện 25/2/2019; ngày chấp nhận đăng 22/3/2019

Tóm tắt:

Vật liệu có lẫn những hạt cứng là một trong những loại vật liệu được sử dụng phổ biến trong nền công nghiệp hiện đại. Vết nứt và khuyết tật xuất hiện sẽ gây ra hiện tượng tập trung ứng suất và làm ảnh hưởng lớn đến độ bền của kết cấu. Các khuyết tật trong vật liệu có thể được mô tả dưới dạng các lỗ trống. Ứng xử của vết nứt trong miền xuất hiện lỗ trống và các hạt cứng sẽ phức tạp hơn dưới tác dụng của tải trọng động. Trong bài báo này, nhóm tác giả phát triển ma trận độ cứng và khối lượng cho các phần tử mô tả vết nứt, lỗ trống và hạt cứng trong vật liệu nền bằng phương pháp phần tử hữu hạn nội suy liên tiếp mở rộng (extended twice-interpolation finite element method - XTFEM) cho bài toán động lực học, tính toán hệ số cường độ ứng suất động theo thời gian, khảo sát sự ảnh hưởng của lỗ trống, hạt cứng gần vết nứt. Các kết quả tính toán hệ số cường độ ứng suất động tại đỉnh vết nứt bằng XTFEM sẽ được so sánh với kết quả đã được công bố trên tạp chí khoa học quốc tế uy tín để kiểm chứng độ tin cậy.

Từ khóa: hạt cứng, lỗ trống, mở rộng, nội suy liên tiếp, tải trọng động, vết nứt, XTFEM.

Chỉ số phân loại: 1.9

Giới thiệu

Độ bền của cấu trúc vật liệu pha hạt cứng phụ thuộc rất nhiều vào sự xuất hiện của các biên bất liên tục. Đối với việc xấp xỉ những lời giải không liên tục, phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống sử dụng không gian xấp xỉ đa thức và phụ thuộc rất nhiều vào lưới để đảm bảo độ chính xác của các kết quả gần miền suy biến hay những vùng có gradient cao. Việc mô phỏng các biên bất liên tục như vết nứt, lỗ trống bằng phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống đòi hỏi mật độ lưới rất lớn. Và việc làm mịn lưới đòi hỏi một lượng tài nguyên máy tính khá lớn. Hơn nữa, việc làm mịn lưới thường khó có thể tiến hành một cách tự động mà đòi hỏi phải có sự can thiệp thủ công của người dùng. Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (extended finite element method - XFEM) được giới thiệu bởi Belytschko và Black [1], Moës và các cộng sự [2]. Phương này thừa hưởng nền tảng lý thuyết vững chắc của phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống và hạn chế được sự khó khăn trong quá trình làm mịn lưới và chia lưới lại. Gần đây nhất, tác giả Bui và các cộng sự [3] đã thành công trong việc thiết lập phần tử 4 nút nội suy liên tiếp (consecutive-interpolation 4-node quadrilateral element - CQ4), dựa trên ý tưởng theo [4, 5]. Các hàm cơ bản của CQ4 được xây dựng với hai lần nội suy. Lần nội suy thứ nhất hoàn toàn giống với phương pháp

phần tử hữu hạn tiêu chuẩn. Lần nội suy thứ hai, hàm xấp xỉ được nội suy thông qua chuyển vị nút và trung bình đạo hàm chuyển vị tại nút. Do đó, hàm dạng nhận được liên tục và có đa thức bậc cao hơn mà không làm tăng thêm tổng số bậc tự do. Trường ứng suất trở nên liên tục mà không cần những biện pháp xử lý phức tạp, kết quả tính toán có sự hội tụ tăng đáng kể so với phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống.

Bài báo này phát triển phần tử làm giàu cho những đối tượng lỗ trống và hạt cứng trong vật liệu dạng hạt dựa trên ý tưởng nội suy liên tiếp mở rộng (extended twice-interpolation finite element method - XTFEM). Điều này sẽ tận dụng được những ưu điểm của ý tưởng phương pháp phần tử hữu hạn nội suy liên tiếp trong phần tử tứ giác bốn nút và ý tưởng làm giàu của XFEM cho những bài toán bất liên tục. Các hàm xấp xỉ của phần tử nội suy liên tiếp sẽ được mở rộng bằng cách thêm các hàm làm giàu mô tả sự bất liên tục của vết nứt, lỗ trống và tạp chất. Kết quả tính toán được so sánh với kết quả đã công bố của bài báo khoa học quốc tế uy tín.

Cơ sở lý thuyết

Phần tử tứ giác, bốn nút nội suy liên tiếp

Theo [3], quá trình nội suy liên tiếp phần tử tứ giác bốn

*Tác giả liên hệ: Email: ttruong@hcmut.edu.vn

An extended twice-interpolation finite element method applied to simulate dynamic crack behaviour in matrix inclusion materials with random holes

Tich Thien Truong^{1*}, Kim Bang Tran¹,
Ngoc Nhan Phan¹, Quoc Tinh Bui²

¹VNUHCM - Ho Chi Minh City University of Technology
²Department of Civil and Environmental Engineering,
Tokyo Institute of Technology, Japan

Received 25 January 2019; accepted 22 March 2019

Abstract:

Matrix inclusion materials are one of the most commonly used materials in modern industry. The appearance of cracks and defects will cause stress concentration and greatly affect the durability of the structure. Defects in materials can be described as holes. Cracks which appear in the domain containing holes and hard particles have more complicated mechanical behaviours than that under the effect of dynamic loads. In this paper, the authors develop stiffness and mass matrices for elements describing cracks, holes, and hard particles in the matrix materials by extended twice-interpolation finite element method - XTFEM for dynamic problems, computing dynamic stress intensity factor over time and evaluating the impact of holes and hard particles near to cracks. The results of calculating the dynamic stress intensity factor at crack tips by XTFEM will be compared with the results published in a prestigious international scientific journal to verify its reliability.

Keywords: crack, dynamic load, extended, hard particle, hole, twice-interpolation, XTFEM.

Classification number: 1.9

nút bao gồm hai giai đoạn:

Giai đoạn nội suy thứ nhất:

Trong phần tử hữu hạn truyền thống, chuyển vị xấp xỉ tại điểm x được tính như sau:

$$u(x) = N_i u^{[i]} + N_j u^{[j]} + N_k u^{[k]} + N_m u^{[m]} \quad (1)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-r)(1-s), N_j = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad (2)$$

$$N_k = \frac{1}{4}(1+r)(1+s), N_m = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

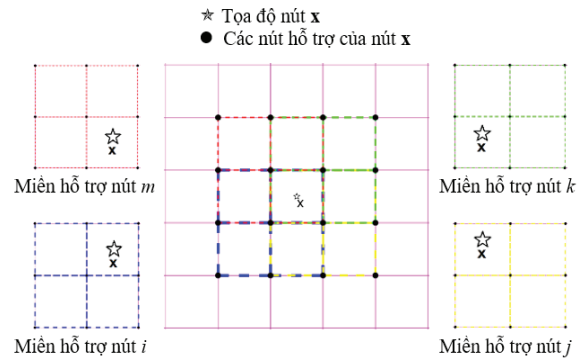
Với $u^{[i]}$, $u^{[j]}$, $u^{[k]}$, $u^{[m]}$ là chuyển vị tại các nút i , j , k , m của phần tử và r , s là tọa độ trong hệ tọa độ tự nhiên của phần tử tứ giác 4 nút.

Miền hỗ trợ nút i , S_i chứa tất cả các phần tử có liên quan nút i . Hàm trọng ω_e được tính như sau:

$$\omega_e = \frac{\Delta_e}{\sum_{e' \in S_i} \Delta_{e'}} \quad (3)$$

Với Δ_e là diện tích của phần tử e .

$\Delta_{e'}$ là diện tích của phần tử e' trong S_i .



Hình 1. Điểm cần nội suy và miền hỗ trợ của nút có tọa độ x .

Đạo hàm trung bình tại nút i có thể viết như sau:

$$\bar{u}_{,x}^{[i]} = \sum_{e \in S_i} \omega_e \bar{u}_{,x}^{[e]} = \sum_{l=1}^{n_e} \left[\sum_{e \in S_i} \left(\omega_e N_{l,x}^{[i][e]} \right) \right] u_l \quad (4)$$

$$\bar{N}_{l,x}^{[i]} = \sum_{e \in S_i} \left(\omega_e N_{l,x}^{[i][e]} \right) \quad (5)$$

Giai đoạn nội suy thứ hai:

Trong giai đoạn nội suy lần hai, giá trị nội suy trên điểm x được tính như sau:

$$\hat{u}(x) = \phi_i u^{[i]} + \phi_{ix} \bar{u}_{,x}^{[i]} + \phi_{iy} \bar{u}_{,y}^{[i]} + \phi_j u^{[j]} + \phi_{jx} \bar{u}_{,x}^{[j]} + \phi_{jy} \bar{u}_{,y}^{[j]} + \phi_k u^{[k]} + \phi_{kx} \bar{u}_{,x}^{[k]} + \phi_{ky} \bar{u}_{,y}^{[k]} + \phi_m u^{[m]} + \phi_{mx} \bar{u}_{,x}^{[m]} + \phi_{my} \bar{u}_{,y}^{[m]} \quad (6)$$

Với $\phi_i, \phi_{ix}, \phi_{iy}$ cần đáp ứng các quan hệ sau:

$$\begin{aligned} \phi_i(\mathbf{x}_l) &= \delta_{il}, \quad \phi_{i,x}(\mathbf{x}_l) = 0, \quad \phi_{i,y}(\mathbf{x}_l) = 0 \\ \phi_{ix}(\mathbf{x}_l) &= 0, \quad \phi_{ix,x}(\mathbf{x}_l) = \delta_{il}, \quad \phi_{ix,y}(\mathbf{x}_l) = 0 \\ \phi_{iy}(\mathbf{x}_l) &= 0, \quad \phi_{iy,x}(\mathbf{x}_l) = 0, \quad \phi_{iy,y}(\mathbf{x}_l) = \delta_{il} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\delta_{il} = \begin{cases} 1, & \text{khi } i = l \\ 0, & \text{khi } i \neq l \end{cases} \quad (8)$$

$\phi_j, \phi_{jx}, \phi_{jy}, \phi_k, \phi_{kx}, \phi_{ky}, \phi_m, \phi_{mx}, \phi_{my}$ có quan hệ tương

tự như $\phi_i, \phi_{ix}, \phi_{iy}$.

$\phi_i, \phi_{ix}, \phi_{iy}$ được tính như sau:

$$\phi_i = N_1 + N_1^2 N_2 + N_1^2 N_3 + N_1^2 N_4 - N_1 N_2^2 - N_1 N_3^2 - N_1 N_4^2 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ix} &= -(x_1 - x_2)(N_1^2 N_2 + b N_1 N_2 N_3 + b N_1 N_2 N_4) \\ &\quad - (x_1 - x_3)(N_1^2 N_3 + b N_1 N_3 N_4 + b N_1 N_3 N_2) \\ &\quad - (x_1 - x_4)(N_1^2 N_4 + b N_1 N_4 N_2 + b N_1 N_4 N_3) \end{aligned} \quad (10)$$

ϕ_{iy} được tính tương tự bằng cách thay biến x bằng biến y. Với $b = 1/2$.

Thay thế vào phương trình (6) thì được trường chuyển vị có dạng sau

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n_s} \hat{N}_l(\mathbf{x}) u_l \quad (11)$$

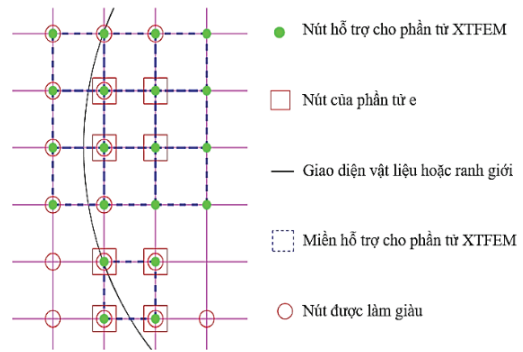
Với các hàm dạng nội suy hai lần liên tiếp được tính như dưới đây:

$$\begin{aligned} \hat{N}_l &= \phi_i N_l^{[i]} + \phi_{ix} \bar{N}_{l,x}^{[i]} + \phi_{iy} \bar{N}_{l,y}^{[i]} + \phi_j N_l^{[j]} + \phi_{jx} \bar{N}_{l,x}^{[j]} + \phi_{jy} \bar{N}_{l,y}^{[j]} \\ &\quad + \phi_k N_l^{[k]} + \phi_{kx} \bar{N}_{l,x}^{[k]} + \phi_{ky} \bar{N}_{l,y}^{[k]} + \phi_m N_l^{[m]} + \phi_{mx} \bar{N}_{l,x}^{[m]} + \phi_{my} \bar{N}_{l,y}^{[m]} \end{aligned} \quad (12)$$

Hàm làm giàu cho biên bất liên tục hình học trong XTFEM

Đối với việc xây dựng các hàm làm giàu cho biên bất liên tục hình học của các phần tử XTFEM hoàn toàn giống với XFEM, chỉ khác là phần tử XTFEM sẽ có miền hỗ trợ lớn hơn. Theo như [3], [5] và [6] thì cần lưu ý rằng, quá trình nội suy liên tiếp trên các nút được làm giàu của các phần tử có biên bất liên tục cắt qua sẽ không thực hiện được do sự gián đoạn. Để giải quyết vấn đề này, một lựa chọn thay thế là cải thiện tính toán của trung bình đạo hàm cho các nút được làm giàu tại các phần tử đó như sau:

$$\bar{N}_{f,x}^{[i]} = N_{f,x}^{[i][e]}, \quad \bar{N}_{f,y}^{[i]} = N_{f,y}^{[i][e]} \quad (13)$$



Hình 2. Miền hỗ trợ cho phần tử làm giàu một phần và làm giàu toàn phần

Nói cách khác, theo công thức (13) và hình 2, những phần tử bị biên bất liên tục cắt qua, tất cả các nút đều được làm giàu (làm giàu toàn phần), sẽ chỉ có miền hỗ trợ là chính phần tử đó thôi. Các ký hiệu trong (13) có ý nghĩa tương tự trong công thức (5).

Hàm làm giàu cho biên bất liên tục là cạnh vết nứt:

Dạng hình học của biên bất liên tục có thể được đặc trưng bởi giá trị 0 của đường cong hàm tập mức $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ và $\phi(\mathbf{x}, t)$ được xác định như sau:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \pm \min_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma(t)} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma\| \quad (14)$$

Với Γ là biên bất liên tục, t là tập hợp điểm và dấu cộng trừ được định nghĩa bởi dấu của $\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma$.

Đối với biên bất liên tục là cạnh vết nứt, hàm làm giàu Heaviside $H(\mathbf{x})$ sẽ được sử dụng.

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{khi } \phi(\mathbf{x}) > 0 \\ -1, & \text{khi } \phi(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Ma trận biến dạng - chuyển vị \mathbf{B} của cạnh vết nứt được xác định như sau:

$$\mathbf{B}_i^{spl} = \begin{bmatrix} (\hat{N}_i[H(\xi) - H(\xi_i)])_{,x} & 0 \\ 0 & (\hat{N}_i[H(\xi) - H(\xi_i)])_{,y} \\ (\hat{N}_i[H(\xi) - H(\xi_i)])_{,y} & (\hat{N}_i[H(\xi) - H(\xi_i)])_{,x} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ma trận hàm dạng \mathbf{N} của cạnh vết nứt được xác định như sau:

$$\mathbf{N}_i^{spl} = \begin{bmatrix} \hat{N}_i[H(\xi) - H(\xi_i)] & 0 \\ 0 & \hat{N}_i[H(\xi) - H(\xi_i)] \end{bmatrix} \quad (17)$$

Với \hat{N}_i là hàm dạng nội suy hai lần liên tiếp tại nút được làm giàu i

$H(\xi)$ là hàm Heviside của điểm Gauss đang xét

$H(\xi_i)$ là hàm Heviside của nút i đang xét

Hàm làm giàu cho đỉnh vết nứt:

Hàm làm giàu tại đỉnh vết nứt được định nghĩa theo các thành phần của hệ tọa độ cực địa phương (r, θ) đặt tại đỉnh vết nứt.

$$\left\{ F_{\alpha}(r, \theta) \right\}_{\alpha=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (18)$$

Ma trận biến dạng - chuyển vị \mathbf{B} của đỉnh vết nứt được xác định như sau:

$$\mathbf{B}_i^{tip\alpha} = \begin{bmatrix} \left(\hat{N}_i [F_{\alpha} - F_{ai}] \right)_{,x} & 0 \\ 0 & \left(\hat{N}_i [F_{\alpha} - F_{ai}] \right)_{,y} \\ \left(\hat{N}_i [F_{\alpha} - F_{ai}] \right)_{,y} & \left(\hat{N}_i [F_{\alpha} - F_{ai}] \right)_{,x} \end{bmatrix} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_i^{tip} = \left[\mathbf{B}_i^{tip1} \quad \mathbf{B}_i^{tip2} \quad \mathbf{B}_i^{tip3} \quad \mathbf{B}_i^{tip4} \right] \quad (20)$$

Ma trận hàm dạng \mathbf{N} của đỉnh vết nứt được xác định như sau:

$$\mathbf{N}_i^{tip\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{N}_i [F_{\alpha} - F_{ai}] & 0 \\ 0 & \hat{N}_i [F_{\alpha} - F_{ai}] \end{bmatrix} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (21)$$

$$\mathbf{N}_i^{tip} = \left[\mathbf{N}_i^{tip1} \quad \mathbf{N}_i^{tip2} \quad \mathbf{N}_i^{tip3} \quad \mathbf{N}_i^{tip4} \right] \quad (22)$$

Hàm làm giàu cho biên bất liên tục là lỗ trống:

Đối với biên bất liên tục là lỗ rỗng, hàm làm giàu Heaviside $V(\mathbf{x})$ vẫn được sử dụng như sau:

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{khi } \phi(\mathbf{x}) > 0 \\ 0, & \text{khi } \phi(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (23)$$

Điều đó có nghĩa là những nút nằm bên ngoài lỗ rỗng sẽ có giá trị $V(\mathbf{x}) = 1$ và những nút nằm bên trong lỗ rỗng sẽ có giá trị $V(\mathbf{x}) = 0$.

Ma trận biến dạng - chuyển vị \mathbf{B} của biên lỗ trống được xác định như sau:

$$\mathbf{B}_i^{hole} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{i,x} [V(\xi) - V(\xi_i)] & 0 \\ 0 & \hat{N}_{i,y} [V(\xi) - V(\xi_i)] \\ \hat{N}_{i,y} [V(\xi) - V(\xi_i)] & \hat{N}_{i,x} [V(\xi) - V(\xi_i)] \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ma trận hàm dạng \mathbf{N} của biên lỗ trống được xác định như sau:

$$\mathbf{N}_i^{hole} = \begin{bmatrix} \hat{N}_i [V(\xi) - V(\xi_i)] & 0 \\ 0 & \hat{N}_i [V(\xi) - V(\xi_i)] \end{bmatrix} \quad (25)$$

Hàm làm giàu cho biên bất liên tục là hạt cứng:

Các phần tử bị biên của hạt cứng bất kỳ cắt qua sẽ bị bất liên tục về vật liệu và tính chất này được mô tả bằng cách thêm hàm làm giàu trị tuyệt đối vào trường chuyển vị.

$$\chi = \sum_i \hat{N}_i(\mathbf{x}) \left| \phi_i(\mathbf{x}) \right| - \left| \sum_i \hat{N}_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \right| \quad (26)$$

Với ϕ_i là hàm khoảng cách xét dấu tại nút i của một phần tử được làm giàu.

Ma trận biến dạng - chuyển vị \mathbf{B} của biên tạp chất được xác định như sau:

$$\mathbf{B}_i^{inc} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{i,x} \chi(\mathbf{x}_i) + \hat{N}_i \chi(\mathbf{x}_i)_{,x} & 0 \\ 0 & \hat{N}_{i,y} \chi(\mathbf{x}_i) + \hat{N}_i \chi(\mathbf{x}_i)_{,y} \\ \hat{N}_{i,y} \chi(\mathbf{x}_i) + \hat{N}_i \chi(\mathbf{x}_i)_{,y} & \hat{N}_{i,x} \chi(\mathbf{x}_i) + \hat{N}_i \chi(\mathbf{x}_i)_{,x} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ma trận hàm dạng \mathbf{N} của biên hạt cứng được xác định như sau:

$$\mathbf{N}_i^{inc} = \begin{bmatrix} \hat{N}_i \chi(\mathbf{x}_i) & 0 \\ 0 & \hat{N}_i \chi(\mathbf{x}_i) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Động lực học trong bài toán hỗn hợp nhiều biên bất liên tục:

Xét một điểm có tọa độ \mathbf{x} trong mô hình phần tử hữu hạn. Giả sử có nhiều sự bất liên tục gồm vết nứt, lỗ trống và hạt cứng cùng tồn tại. Theo tài liệu [7], trường chuyển vị xấp xỉ được xác định như sau:

$$\hat{u}^h(\mathbf{x}) = \hat{u}(\mathbf{x}) + \hat{u}^{enr}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_s} \hat{N}_j(\mathbf{x}) u_j + \sum_{l=1}^{np} \sum_{k=1}^m \hat{N}_k(\mathbf{x}) \hat{\psi}^l(\mathbf{x}) a_k^l \quad (29)$$

Với n_s là số nút hỗ trợ điểm có tọa độ \mathbf{x} ; np là số điều kiện bất liên tục xảy ra với phần tử chứa điểm có tọa độ \mathbf{x} ; với phần tử chứa đỉnh vết nứt thì $np = 4$, còn với phần tử có biên bất liên tục là đường nứt, biên lỗ rỗng, hạt cứng đi qua thì $np = 1$; m là số nút được làm giàu trong mỗi np ; $\hat{\psi}^l$ là hàm làm giàu trong mỗi điều kiện bất liên tục (vết nứt, lỗ rỗng, hạt cứng) np ; a là bậc tự do ứng với nút được làm giàu.

Bài báo chỉ xét tới độ cứng \mathbf{K} , khối lượng \mathbf{M} và bộ qua giảm chấn \mathbf{C} . Do đó, phương trình động lực học kết cấu trở thành như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^h + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (30)$$

Với \mathbf{u}^h và $\ddot{\mathbf{u}}^h$ là các vector chuyển vị và gia tốc tại nút phần tử. Với các nút được làm giàu, các bậc tự do làm giàu \mathbf{a} được thêm vào.

$$\mathbf{u}^h = \{\mathbf{u}, \mathbf{a}\}^T; \quad \ddot{\mathbf{u}}^h = \{\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{a}}\}^T \quad (31)$$

Ma trận độ cứng \mathbf{K} , ma trận khối lượng \mathbf{M} được làm giàu có dạng như sau:

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{uu} & \mathbf{K}_{ij}^{ua} \\ \mathbf{K}_{ij}^{au} & \mathbf{K}_{ij}^{aa} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij}^{uu} & \mathbf{M}_{ij}^{ua} \\ \mathbf{M}_{ij}^{au} & \mathbf{M}_{ij}^{aa} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Với

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s d\Omega \text{ sao cho } r, s = \mathbf{u}, \mathbf{a} \quad (33)$$

Các thành phần trong ma trận khối lượng được tính như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij}^{uu} &= \int_{\Omega} \rho \hat{N}_i \hat{N}_j d\Omega; \quad \mathbf{M}_{ij}^{aa} = \int_{\Omega} \rho \left[\hat{N}_i \hat{\psi}(\mathbf{x}) \right] \left[\hat{N}_j \hat{\psi}(\mathbf{x}) \right] d\Omega \\ \mathbf{M}_{ij}^{ua} &= \int_{\Omega} \rho \hat{N}_i \left[\hat{N}_j \hat{\psi}(\mathbf{x}) \right] d\Omega; \quad \mathbf{M}_{ij}^{au} = \int_{\Omega} \rho \left[\hat{N}_i \hat{\psi}(\mathbf{x}) \right] \hat{N}_j d\Omega \end{aligned} \quad (34)$$

Với \mathbf{B} là các ma trận đạo hàm hàm dạng được tính từ các công thức (16), (19), (24), (27) tùy theo dạng bất liên tục khác nhau; \mathbf{D} là ma trận vật liệu; ρ là khối lượng riêng.

Phương pháp tích phân tương tác cho bài toán động lực học của vết nứt tĩnh:

Để xác định hệ số cường độ ứng suất động, một phương pháp hiệu quả đã được đề xuất bởi Nishioka và Alturi (1984). Theo tài liệu [8], dạng giải tích của tích phân J cho bài toán động lực học với vết nứt tĩnh có dạng như sau:

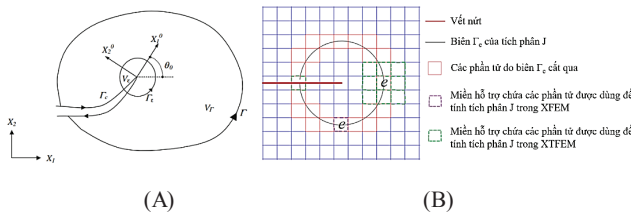
$$J_k = \int_{\Gamma+\Gamma_c} \left((W+K)n_k - t_i \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \int_{V_1-V_c} \left((\rho \ddot{u}_i - f_i) \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \dot{u}_i \right) dV \quad (35)$$

Với u_p , t_p , f_p , n_k và ρ lần lượt là ký hiệu của chuyển vị, áp lực, lực thể tích, vector pháp tuyến và khối lượng riêng.

$$W = (1/2) \rho \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \text{ là mật độ năng lượng biến dạng} \quad (36)$$

K là mật độ năng lượng động học

Phương pháp tính tích phân J của XFEM dùng trường chuyển vị có nội suy liên tiếp. Số lượng nút và miền hỗ trợ chứa các phần tử khi tính tích phân J trong XFEM lớn hơn so với XFEM. Sự khác nhau đó được thể hiện như hình 3.



Hình 3. (A) Tọa độ địa phương tại đỉnh vết nứt và (B) Miền hỗ trợ chứa các phần tử được dùng để tính tích phân J trong XFEM và XFEM.

Mô hình mô phỏng

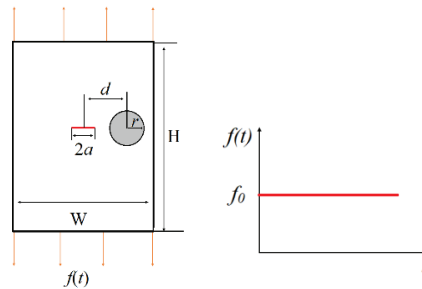
Mô hình 1

Xét bài toán tấm phẳng với chiều rộng $W = 20$ mm, chiều cao $H = 40$ mm, vết nứt nằm ở giữa tấm có kích thước $2a = 4,8$ mm. Lực phân bố đều $f_0 = 1$ N/m ở cạnh trên và dưới của tấm. Mô-đun đàn hồi Young: $E = 199,992$ GPa, hệ số Poisson: $\nu = 0,3$, khối lượng riêng $\rho = 5000$ kg/m³. Bước thời gian là $\Delta t = 0,05$ μ s và tải tác dụng từ 0 đến 13,62 μ s như hình 4. Hạt cứng trong vật liệu nền có bán kính $r = 2$ mm cách tâm vết nứt với khoảng cách $d = 6$ mm theo phương x . Hạt cứng có mô-đun đàn hồi Young: $E = 199,992 \times 10^3$ GPa, hệ số poisson ν của hạt cứng và vật liệu nền đều bằng 0,3. Trường hợp đang xét là biến dạng phẳng. Vận tốc lan truyền sóng $C_d = 7,34$ mm μ s⁻¹. Kết quả tính toán từ XFEM sẽ được so sánh với kết quả tính theo XFEM, đã được công bố trong tài liệu [9]. Thời gian sẽ được chuẩn hóa như sau:

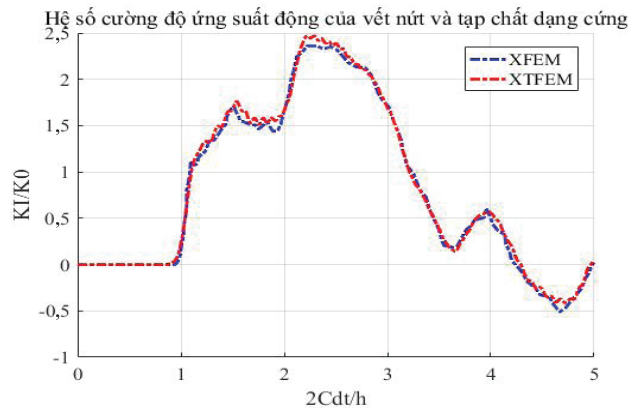
$$t_{chuan_hoa} = 2C_d t / h \quad \text{với } h = H \text{ là chiều cao tấm}$$

Hệ số cường độ ứng suất động Mode I sẽ được chuẩn hóa như sau:

$$K_I^* = \frac{K_I}{K_0}; \quad K_0 = f_0 \sqrt{\pi a}$$



Hình 4. Tấm phẳng với vết nứt ở giữa gần hạt cứng hình tròn.

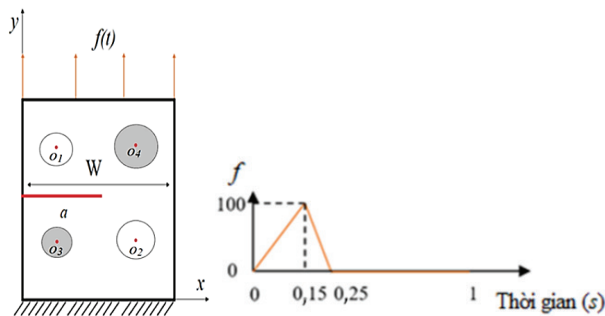


Hình 5. So sánh kết quả hệ số cường độ ứng suất động giữa hai phương pháp.

Sự so sánh các kết quả tính toán giữa hai phương pháp XFEM [9] và XTFEM được thể hiện trong hình 5. Các kết quả hệ số cường độ ứng suất theo thời gian thu được từ XTFEM khá tương đồng với các kết quả được tham khảo từ [9].

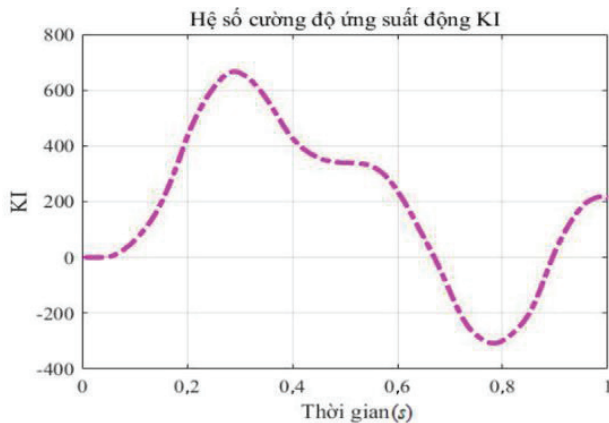
Mô hình 2

Trong ví dụ tiếp theo, xét mô hình tấm phẳng bị nứt có chứa đồng thời lỗ trống và hạt cứng. Các thông số về kích thước, vật liệu và tải trọng được cho tương tự như mô hình 1. Tấm chứa 2 lỗ trống với tọa độ tâm và bán kính lần lượt là: $O_1(1,25; 3,75)$ m, $r_1 = 0,6$ m và $O_2(3,75; 1,25)$ m, $r_2 = 0,7$ m. Tấm chứa 2 hạt cứng với tọa độ tâm và bán kính lần lượt là: $O_3(1,25; 1,25)$ m, $r_3 = 0,55$ m và $O_4(3,75; 3,75)$ m, $r_4 = 0,8$ m. Tấm có vết nứt bắt đầu từ giữa cạnh trái đi về tâm của tấm, với chiều dài vết nứt là $a = 2,5$ m. Lực phân bố cạnh trên theo thời gian như hình 6. Cạnh dưới được ngàm. Trường hợp đang xét là biến dạng phẳng.

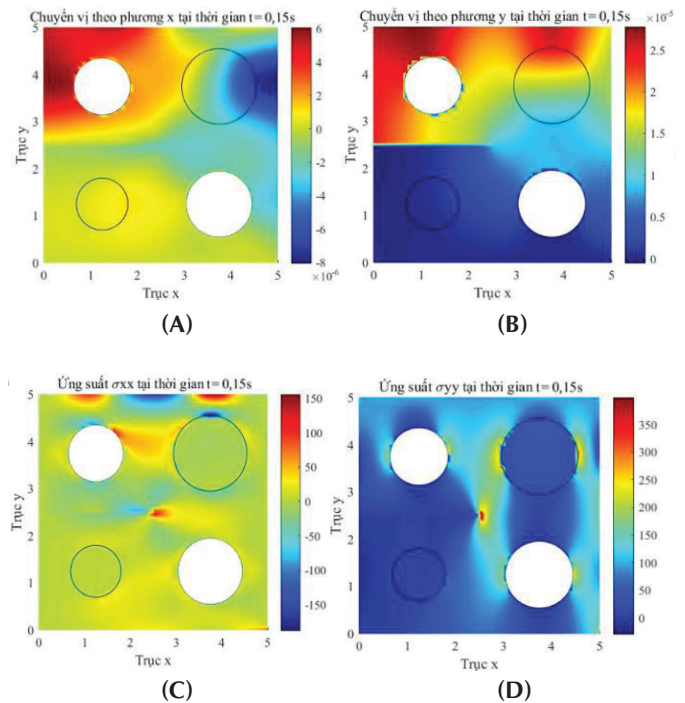


Hình 6. Tấm phẳng chứa vết nứt, lỗ trống và hạt cứng chịu tải theo thời gian.

Đồ thị hệ số cường độ ứng suất động Mode I của tấm theo thời gian và chuyển vị theo phương x, y , trường ứng suất theo hai phương x, y cũng được minh họa qua hình 7 và 8.



Hình 7. Hệ số cường độ ứng suất động mode I của tấm theo thời gian.



Hình 8. (A) Chuyển vị theo phương x ; (B) Chuyển vị theo phương y ; (C) Ứng suất theo phương x ; (D) Ứng suất theo phương y tại thời điểm $t = 0,15s$.

Tại thời điểm $t = 0,15s$, lúc tải có giá trị lớn nhất, thì ứng suất chủ yếu tập trung tại đỉnh vết nứt, còn cạnh vết nứt ứng suất gần như bằng 0, từ đó cho thấy trong trường hợp này vết nứt chính là biên bất liên tục dạng mạnh nhất. Ứng suất cũng tập trung ở hạt cứng phía trên vết nứt, gây ảnh hưởng rõ rệt đến hệ số cường độ ứng suất tại đỉnh vết nứt. Với việc sử dụng XTFEM, trường ứng suất khá mịn. Xét về chuyển vị theo phương y , chuyển vị trên và dưới vết nứt có sự đối lập nhau rõ rệt, phần phía trên vết nứt bị kéo ra nên chuyển vị rất lớn.

Kết luận

Trong bài báo này, phương pháp phần tử hữu hạn nội suy liên tiếp mở rộng (XTFEM) đã được áp dụng để xây dựng chương trình mô phỏng bài toán động lực học vết nứt với sự ảnh hưởng của các khuyết tật lỗ rỗng và các hạt cứng phân bố trong vật thể dựa trên ngôn ngữ lập trình Matlab. Phương pháp này có ưu điểm là dễ dàng mô tả được tính chất vật lý của vết nứt, lỗ rỗng và hạt cứng thông qua hàm làm giàu mà không cần phụ thuộc vào lưới mô hình. Đồng thời có thể đem lại một trường ứng suất và biến dạng trơn, liên tục. Điều này sẽ ảnh hưởng đến kết quả tính hệ số cường độ ứng suất tại đỉnh vết nứt. Một vài ví dụ mô phỏng số đã được thực hiện và so sánh để chứng tỏ tính đúng đắn của chương trình. Kết quả thu được từ XTFEM khá tương đồng với kết

quả tham khảo từ tài liệu uy tín [9]. Đề tài này có thể phát triển theo nhiều hướng liên quan đến bài toán nhiều biên bất liên tục với các loại vật liệu khác.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu được tài trợ bởi Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh trong khuôn khổ đề tài mã số To-KHUD-2017-04. Các tác giả xin trân trọng cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] T. Belytschko, T. Black (1999), "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **45**, pp.601-620.

[2] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko (1999), "A finite element method for crack growth without remeshing", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **46**, pp.131-150.

[3] Q.T. Bui, Q.D. Vo, Ch. Zhang, D.D. Nguyen (2014), "A consecutive-interpolation quadrilateral element (CQ4)", *Formulation and Applications Finite Elem. Anal. Des.*, **84**, pp.14-31.

[4] C. Zheng, S.C. Wu, X.H. Tang, J.H. Zhang (2010), "A novel twice-interpolation finite element method for solid mechanics problems", *Acta Mech. Sin.*, **26**, pp.265-278.

[5] S.C. Wu, W.H. Zhang, X. Peng, B.R. Miao (2012), "A twice-interpolation finite element method (TFEM) for crack propagation problems", *Int. J. Comput. Methods*, **9**, pp.12-55.

[6] Zuoyi Kang, Tinh Quoc Bui, Du Dinh Nguyen, Takahiro Saitoh, Sohichi Hirose (2015), "An extended consecutive-interpolation quadrilateral element (XCQ4) applied to linear elastic fracture mechanics", *Acta Mech. Sin.*, **80**, pp.17-55.

[7] S. Mohammadi (2012), *XFEM fracture analysis of composites*, John Wiley & Sons.

[8] D. Motamedi and S. Mohammadi (2010), "Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the XFEM", *Int. J. Fract.*, **161**, pp.21-39.

[9] S. Jiang, C. Du, C. Gu and X. Chen (2014), "XFEM analysis of the effects of voids, inclusions and other cracks on the dynamic stress intensity factor of a major crack", *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, **37**, pp.1-17.