Định lý thứ hai của Ritt và vấn đề duy nhất đối với tích *q*-sai phân của hàm phân hình trên một trường không-Acsimet

Phạm Ngọc Hoa*, Nguyễn Xuân Lai

Khoa Toán, Trường Cao đẳng Hải Dương

Ngày nhận bài 29/6/2018; ngày chuyển phản biện 2/7/2018; ngày nhận phản biện 1/8/2018; ngày chấp nhận đăng 14/8/2018

Tóm tắt:

Trong bài báo này, các tác giả thiết lập một số kết quả tương tự Định lý thứ hai của Ritt cho tích *q*-sai phân dạng *f^n f(qz+c)* với *f* là hàm phân hình trên một trường không-Acsimet.

Từ khóa: **Định lý Ritt, Giả thuyết Hayman, hàm phân hình, toán tử sai phân, trường không-Acsimet.**

Chỉ số phân loại: **1.1**

Ritt's second therorem and uniqueness problems for differential and *q*-difference polynomials of meromorphic functions in a non-Archimedean field

Ngoc Hoa Pham*, Xuan Lai Nguyen

Department of Mathematics, Hai Duong College

Received 29 June 2018; accepted 14 August 2018

Abstract:

In this paper, the authors consider linear composition polynomials of meromorphic functions in a non-Archimedean field of the form *f^n f(qz+c)* and establish some versions of Ritt's second theorem.

Keywords: **difference operators, Hayman conjecture, meromorphic functions, non-Archimedean field, Ritt's decomposition.**

Classification number: **1.1**

Mở đầu

Định lý cơ bản của lý thuyết số phát biểu rằng mọi số nguyên $n \geq 2$ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng tích các số nguyên tố có dạng $n = p_1^{m_1}...p_k^{m_k}$, với $k \geq 1$, ở đó các thừa số nguyên tố $p_1, ..., p_k$ đôi một phân biệt và các số mũ tương ứng $m_1 \geq 1, ..., m_k \geq 1$ được xác định một cách duy nhất theo n. Ritt là người đầu tiên xét tương tự định lý này đối với các đa thức.

Để mô tả kết quả của Ritt, ta ký hiệu $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ (tương ứng, $\mathcal{A}(\mathbb{C})$) là tập các hàm phân hình (tương ứng, nguyên) trên $\mathbb{C}$ và ký hiệu $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ là tập các đa thức bậc 1. Đặt $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ là các tập con khác rỗng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, khi đó một hàm phân hình $F(z)$ được gọi là *không phân tích được* trên $\mathcal{E}\times \mathcal{F}$ nếu bất kỳ cách viết thành nhân tử $F(z) = f \circ g(z)$ với $f(z) \in \mathcal{E}$ và $g(z) \in \mathcal{F}$ đều kéo theo hoặc f là tuyến tính hoặc g là tuyến tính. Năm 1922, Ritt [1] đã chứng minh định lý sau.

Định lý A (Định lý thứ nhất của Ritt). *Cho $\mathcal{F}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{C}[z] \setminus \mathcal{L}(\mathbb{C})$. Nếu một đa thức $F(z)$ có hai cách phân tích khác nhau thành các đa thức không phân tích được trên $\mathcal{F}\times \mathcal{F}$:*

*Tác giả liên hệ: Email: ngochoa577@gmail.com

$F = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \varphi_r = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \cdots \psi_s$,
thì $r = s$, *và bậc của các đa thức* ψ *là bằng với bậc của các đa thức* φ *nếu không tính đến thứ tự xuất hiện của chúng.*

Cũng trong [1], Ritt đã chứng minh định lý sau:

Định lý B (Định lý thứ hai của Ritt). *Giả sử rằng* $a, b, c, d \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ *thỏa mãn* $a \circ b = c \circ d$ *và gcd(deg(a);deg(c))=gcd(deg(b);deg(d))=1. Khi đó tồn tại các hàm tuyến tính* $l_j \in \mathbb{C}[x]$ *sao cho* $(l_1 \circ a \circ l_2, l_2^{-1} \circ b \circ l_3, l_1 \circ c \circ l_2, l_4^{-1} \circ d \circ l_3)$ *có một trong các dạng*
(F_n, F_m, F_m, F_n) *hoặc* $(x^n, x^s h(x^n), x^s h(x)^n, x^n)$,
ở đó $m, n > 0$ *là nguyên tố cùng nhau,* $s > 0$ *là nguyên tố cùng nhau với* n, *và* $h \in \mathbb{C}[x] \setminus x\mathbb{C}[x]$, l_j^{-1} *là hàm ngược của* l_j; F_n, F_m *là các đa thức Chebychev.*

Ở đây, phép phân tích $F(z) = f \circ g(z)$ chính là phép hợp thành $F(z) = f(g(z))$. Do đó, ta thấy rằng Định lý thứ hai của Ritt mô tả các nghiệm của phương trình $a(b) = c(d)$, ở đó a, b, c, d là các đa thức và bậc của các đa thức là nguyên tố cùng nhau. Rõ ràng phương trình đa thức được Ritt nghiên cứu là trường hợp riêng của phương trình hàm $P(f) = Q(g)$, ở đó P, Q là các đa thức và f, g là các hàm phân hình. Để ý rằng, phương trình hàm liên quan mật thiết đến vấn đề xác định duy nhất đối với hàm phân hình - một ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị. Vấn đề xác định duy nhất đã được nghiên cứu lần đầu tiên bởi R. Nevanlinna. Từ đó, vấn đề xác định duy nhất đã được nghiên cứu liên tục với nhiều hướng nghiên cứu và đã nhận được các kết quả sâu sắc. Hayman là người đầu tiên khởi xướng một hướng nghiên cứu khi ông xem xét tập xác định duy nhất đối với các đa thức vi phân. Năm 1967, Hayman đã chứng minh một kết quả nổi tiếng rằng một hàm phân hình f trên trường số phức $\mathbb{C}$ không nhận giá trị 0 và đạo hàm bậc k của f, với k là số nguyên dương, không nhận giá trị 1 thì f là hàm hằng. Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau:

Giả thuyết Hayman [2]. *Nếu một hàm nguyên* f *thỏa mãn điều kiện* $f^n(z)f'(z) \neq 1$ *với* n *là số nguyên dương và với mọi* $z \in \mathbb{C}$ *thì* f *là hàm hằng.*

Giả thuyết này đã được chính Hayman kiểm tra với $n > 1$ và được Clunie kiểm tra với $n \geq 1$. Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành một hướng nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman. Công trình quan trọng thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về Yang-Hua [3], hai ông đã nghiên cứu vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình và đơn thức vi phân của nó có dạng $f^n f'$. Hai ông đã chứng minh được rằng, với f và g là hai hàm phân hình khác hằng, n là số nguyên, $n \geq 11$ nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ cùng nhận giá trị phức a tính cả bội thì hoặc f, g sai khác nhau một căn bậc $n+1$ của đơn vị, hoặc f, g được tính theo các công thức của hàm mũ với các hệ số thỏa mãn một điều kiện nào đó.

Mục đích của bài báo này là thiết lập các kết quả đối với vấn đề duy nhất của tích q-sai phân dạng $f^n f(qz + c)$. Vũ Hoài An - Phạm Ngọc Hoa [4], Vũ Hoài An - Phạm Ngọc Hoa - Hà Huy Khoái [5], Hà Huy Khoái - Vũ Hoài An [6] và Hà Huy Khoái - Vũ Hoài An - Nguyễn Xuân Lai [7] đã có các kết quả theo hướng nghiên cứu này. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chứng minh các kết quả sau:

Định lý 1. *Cho* f, g *là hai hàm phân hình khác hằng trên* $\mathbb{K}$, n *là số nguyên dương với* $n \geq 13$, $q, c \in \mathbb{K}$, $|q| = 1$. *Giả sử rằng* $f^n f(qz + c)$ *và* $g^n g(qz + c)$ *nhận* 1 *có tính bội. Khi đó* $f = \dfrac{l}{g}$ *với* $l^{n+1} = 1$, *hoặc* $f = hg$ *với* $h^{n+1} = 1$.

Định lý 2. *Cho* f, g *là hai hàm phân hình khác hằng trên* $\mathbb{K}$, n *là số nguyên dương với* $n \geq 25$, $q, c \in \mathbb{K}$, $|q| = 1$. *Giả sử rằng* $f^n f(qz + c)$ *và* $g^n g(qz + c)$ *nhận* 1 *không tính bội. Khi đó* $f = \dfrac{l}{g}$ *với* $l^{n+1} = 1$, *hoặc* $f = hg$ *với* $h^{n+1} = 1$.

Vấn đề nhận giá trị của tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không-Acsimet

Trước hết, chúng tôi trình bày một số định nghĩa và một số kết quả liên quan. Ký hiệu $\mathbb{K}$ là một trường đóng đại số đặc số 0, đầy đủ đối với một giá trị tuyệt đối không-Acsimet ký hiệu bởi $|\ .\ |$.

Định nghĩa 2.1. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$, $q, c \in \mathbb{K}$, $|q| = 1, m, n$ là hai số nguyên dương. Hàm phân hình trên $\mathbb{K}$ được xác định bởi công thức $f^n(z)f^m(qz + c)$ với $z \in \mathbb{K}$ được gọi là *tích q-sai phân* của f.

Bổ đề 2.2. *Cho f và g là các hàm nguyên khác hằng trên $\mathbb{K}$ và*
$F = \frac{1}{f-1}, G = \frac{1}{g-1},\ L = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}$.

1. Nếu $E_f(1) = E_g(1)$ và $L \not\equiv 0$ thì

$$T(r, f) \leq N_2(r, f) + N_2(r, \frac{1}{f}) + N_2(r, g) + N_2(r, \frac{1}{g}) - \log r + O(1),$$

và cũng có bất đẳng thức tương tự đối với $T(r, g)$;

2. Nếu $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$ và $L \equiv 0$ thì một trong ba trường hợp sau đây xảy ra:

i) $T(r, f) \leq N_1(r, f) + N_1(r, \frac{1}{f}) + N_1(r, g) + N_1(r, \frac{1}{g}) - \log r + O(1)$,

và cũng có bất đẳng thức tương tự đối với $T(r, g)$;

ii) $fg \equiv 1$;

iii) $f \equiv g$.

Bổ đề 2.3. *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$ và n, k là các số nguyên dương, $n > 2k$. Khi đó, có*

1. $(n - 2k)T(r, f) + kN(r, f) + N(r, \frac{f^{n-k}}{(f^n)^{(k)}}) \leq T(r, (f^n)^{(k)}) + O(1)$;

2. $N(r, \frac{f^{n-k}}{(f^n)^{(k)}}) \leq kT(r, f) + kN_1(r, f) + O(1)$.

Bổ đề 2.4. *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$ và $q, c \in \mathbb{K}$, $|q| = 1$. Khi đó*

1. $m(r, \frac{f(qz + c)}{f(z)}) = O(1)$;

2. $m(r, \frac{f(z)}{f(qz + c)}) = O(1)$;

3. $T(r, f(qz + c)) = T(r, f(z)) + O(1)$;

4. $N(r, \frac{1}{f(qz + c)}) = N(r, \frac{1}{f(z)}) + O(1)$;

5. $N(r, f(qz + c)) = N(r, f(z)) + O(1)$.

Bổ đề 2.5. *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$, $|q| = 1$, và n, m, d, k là các số nguyên dương sao cho $m > d, d \geq 1, n > 2k$. Khi đó*

1. $(m - d)T(r, f) \leq T(r, f^m(z)f^d(qz + c)) + O(1)$;

2. $(n - 2k)(m - d)T(r, f) + kN(r, f^m(z)f^d(qz + c))+$

$$N(r, \frac{(f^m(z)f^d(qz + c))^{n-k}}{(f^{nm}(z)f^{nd}(qz + c))^{(k)}}) \leq T(r, (f^{nm}(z)f^{nd}(qz + c))^{(k)}) + O(1);$$

3. $N(r, \frac{(f^m(z)f^d(qz + c))^{n-k}}{(f^{nm}(z)f^{nd}(qz + c))^{(k)}}) \leq k(m + d)T(r, f)\ +$

$$kN_1(r, f^m(z)f^d(qz + c)) + O(1) \leq k(m + d + 2)T(r, f) + O(1).$$

Bây giờ, cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$. Cho a là một không điểm của $f - 1$ với bội $\mu^0_{f-1}(a)$, và là không điểm của $g - 1$ với bội $\mu^0_{g-1}(a)$. Ta ký hiệu

$N_1(r, \frac{1}{f-1}; \mu^0_{f-1}(a) > \mu^0_{g-1}(a))$ là hàm đếm các không điểm của $f-1$, mà $\mu^0_{f-1}(a) > \mu^0_{g-1}(a)$ và những không điểm đó được đếm với bội 1, ký hiệu $N_{1,2}(r, \frac{1}{f-1}; \mu^0_{f-1}(a) = \mu^0_{g-1}(a))$ là hàm đếm các không điểm của $f-1$, mà $\mu^0_{f-1}(a) = \mu^0_{g-1}(a) \geq 2$, và mỗi không điểm đó được đếm với bội 1. Bằng cách tương tự, ta định nghĩa: $N_1(r, \frac{1}{g-1}; \mu^0_{g-1}(a) > \mu^0_{f-1}(a))$, $N_{1,2}(r, \frac{1}{f-1}; \mu^0_{g-1}(a) = \mu^0_{f-1}(a))$.

Bổ đề 2.6. *Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$. Nếu $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$, thì một trong các hệ thức sau xảy ra:*

1. $T(r,f) \leq N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g}) + 2(N_1(r,f) + N_1(r,\frac{1}{f})) + N_1(r,g) + N_1(r,\frac{1}{g}) - 2\log r + O(1)$,

và có bất đẳng thức tương tự đối với $T(r,g)$;

2. $fg \equiv 1$;

3. $f \equiv g$.

Áp dụng các bổ đề trên, ta chứng minh được một kiểu của Định lý thứ hai của Ritt như sau:

Bổ đề 2.7. *Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$, $q, c \in \mathbb{K}$, $|q| = 1$, $c \neq 0$, và cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $n > m$. Khi đó*

i) Nếu $f^n(z)f^m(qz+c).g^n(z)g^m(qz+c) = 1$ với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì $f = \dfrac{l}{g}$ với $l^{n+m} = 1$, $l \in \mathbb{K}$.

ii) Nếu $f^n(z)f^m(qz+c) = g^n(z)g^m(qz+c)$ với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì $f = lg$ với $l^{n+m} = 1$, $l \in \mathbb{K}$.

Chứng minh:

i). Từ $f^n(z)f^m(qz+c).g^n(z)g^m(qz+c) = 1$ ta có

$$\big(f(z)g(z)\big)^n\big(f(qz+c)g(qz+c)\big)^m = 1. \tag{1}$$

Đặt $l = f(z)g(z)$. Ta chứng minh l là hằng. Giả sử trái lại, l khác hằng. Khi đó từ (1) ta có:

$$l^n(z) = \frac{1}{l^m(qz+c)}, \text{với mọi } z \in \mathbb{K}.$$

Từ đây và từ Bổ đề 2.4 ta suy ra

$$T(r,l^n) = nT(r,l) + O(1) = T\Big(r, \frac{1}{l^m(qz+c)}\Big) = mT(r, l(qz+c)) + O(1) = mT(r,l) + O(1).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $n > m$.

ii). Từ $f^n(z)f^m(qz+c) = g^n(z)g^m(qz+c)$ ta có

$$\Big(\frac{f(z)}{g(z)}\Big)^n\Big(\frac{f(qz+c)}{g(qz+c)}\Big)^m = 1. \tag{2}$$

Đặt $l(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$. Khi đó $l(qz+c) = \dfrac{f(qz+c)}{g(qz+c)}$. Từ đây và (2) ta nhận được $l^n(z) = \dfrac{1}{l^m(qz+c)}$. Lập luận tương tự như chứng minh phần i) ta nhận được kết quả của ii).

Bổ đề 2.8. *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}, q, c \in \mathbb{K}, |q| = 1, m, n$ là hai số nguyên dương thỏa mãn $n \geq m+4$. Khi đó $f^n(z)f^m(qz+c)$ nhận mọi giá trị a khác không thuộc $\mathbb{K}$.*

Chứng minh. Do f khác hằng và Bổ đề 2.4 ta có $f(qz+c)$ khác hằng. Đặt $F = f^n(z)f^m(qz+c)$. Ta thấy rằng mọi cực điểm của F hoặc là cực điểm của f, hoặc là cực điểm của $f(qz+c)$; mọi không điểm của F hoặc là không điểm của f, hoặc là không điểm của $f(qz+c)$. Áp dụng Định lý chính thứ hai và kết hợp với Bổ đề 2.5 ta nhận được

$$T(r,f) = (n-m)T(r,f) + O(1) \leq T(r, f^n(z)f^m(qz+c)) \leq N_1(r,F) + N_1\Big(r, \frac{1}{F}\Big) + N_1\Big(r, \frac{1}{F-a}\Big) - \log r + O(1) \leq N_1(r,F) + N_1(r, f(qz+c)) + N_1\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + N_1\Big(r, \frac{1}{f(qz+c)}\Big) + N_1\Big(r, \frac{1}{F-a}\Big) - \log r + O(1) \leq 4T(r,f) + N_1\Big(r, \frac{1}{F-a}\Big) - \log r + O(1).$$

Suy ra

$$(n-m-4)T(r,f)+\log r \le N_1\Big(r,\frac{1}{F-a}\Big)-\log r+O(1).$$

Từ $n \ge m+4$ suy ra $N_1\Big(r,\dfrac{1}{F-a}\Big)$ tiến ra ∞ khi r tiến ra ∞. Vậy $f^n(z)f^m(qz+c)$ nhận giá trị a.

Chứng minh các định lý chính

Chứng minh Định lý 1.

Đặt $A=f^nf(qz+c)$ và $B=g^ng(qz+c)$. Áp dụng Bổ đề 3.2 [7] ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $T(r,A)\le N_2(r,A)+N_2\Big(r,\dfrac{1}{A}\Big)+N_2(r,B)+N_2\Big(r,\dfrac{1}{B}\Big)-\log r+O(1)$. Ta có

$N_2(r,A)=N_2\big(r,f^nf(qz+c)\big)\le N_2(r,f^n)+N_2\big(r,f(qz+c)\big)\le 2N_1(r,f)+N\big(r,f(qz+c)\big)\le$ $2T(r,f)+T\big(r,f(qz+c)\big)+O(1)=2T(r,f)+T(r,f)+O(1)=3T(r,f)+O(1)$;

$N_2\Big(r,\dfrac{1}{A}\Big)=N_2\Big(r,\dfrac{1}{f^nf(qz+c)}\Big)\le N_2\Big(r,\dfrac{1}{f^n}\Big)=N_2\Big(r,\dfrac{1}{f^nf(qz+c)}\Big)\le 2N_1\Big(r,\dfrac{1}{f}\Big)=N\Big(r,\dfrac{1}{f^nf(qz+c)}\Big)\le$ $3T(r,f)+O(1)$.

Tương tự ta có

$N_2(r,B)\le 3T(r,f)+O(1)$;

$N_2\Big(r,\dfrac{1}{B}\Big)\le 3T(r,f)+O(1)$.

Từ các bất đẳng thức trên và Bổ đề 2.5 ta nhận được

$(n-1)T(r,f)\le T(r,A)+O(1)\le 6\big(T(r,f)+T(r,g)\big)-\log r+O(1)$;

$(n-1)T(r,g)\le T(r,B)+O(1)\le 6\big(T(r,f)+T(r,g)\big)-\log r+O(1)$.

Do đó, có

$(n-1)\big(T(r,f)+T(r,g)\big)\le T(r,A)+T(r,B)+O(1)\le 12\big(T(r,f)+T(r,g)\big)-2\log r+O(1)$;

$(n-13)\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+\log r\le O(1)$.

Do $n\ge 13$ nên ta gặp mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $A.B=1$ tức là $f^nf(qz+c).g^ng(qz+c)=1$. Theo Bổ đề 2.7i) suy ra $f=\dfrac{l}{g}$ với $l^{n+1}=1$.

Trường hợp 3. $A=B$ tức là $f^nf(qz+c)=g^ng(qz+c)$. Theo Bổ đề 2.7ii) suy ra $f=hg$ với $h^{n+1}=1$.

Chứng minh Định lý 2.

Ta dùng các ký hiệu trong Định lý 1.

Áp dụng Bổ đề 3.6 [5] cho A, B ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $T(r,A)\le N_2(r,A)+N_2\Big(r,\dfrac{1}{A}\Big)+N_2(r,B)+N_2\Big(r,\dfrac{1}{B}\Big)+2\Big(\mathrm{N}_1(r,A)+N_1\Big(r,\dfrac{1}{A}\Big)\Big)+$ $N_1(r,B)+N_1\Big(r,\dfrac{1}{B}\Big)-2\log r+O(1)$.

Đánh giá tương tự như trong Định lý 1 ta có

$N_2(r,A)\le 3T(r,f)+O(1)$; $N_2\Big(r,\dfrac{1}{A}\Big)\le 3T(r,f)+O(1)$;

$N_2(r,B)\le 3T(r,f)+O(1)$; $N_2\Big(r,\dfrac{1}{B}\Big)\le 3T(r,f)+O(1)$.

Mặt khác, ta có

$N_1(r,A)\le N_1(r,f^n)+N_1\big(r,f(qz+c)\big)=N_1(r,f)+N_1\big(r,f(qz+c)\big)$

$\le T(r,f)+T\big(r,f(qz+c)\big)+O(1)=T(r,f)+T(r,f)+O(1)=2T(r,f)+O(1)$;

$$N_1\Big(r, \frac{1}{A}\Big) \le N_1\Big(r, \frac{1}{f^n}\Big) + N_1\Big(r, \frac{1}{f(qz+c)}\Big) \le 2T(r,f) + O(1).$$

Tương tự, ta có

$$N_1(r, B) \le 2T(r,f) + O(1); N_1\Big(r, \frac{1}{B}\Big) \le 2T(r,f) + O(1).$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta có

$$(n-1)T(r,f) \le 14T(r,f) + 10T(r,g) - 2\log r + O(1),$$
$$(n-1)T(r,g) \le 14T(r,f) + 10T(r,g) - 2\log r + O(1).$$

Do đó

$$(n-25)\big(T(r,f) + T(r,g)\big) + 4\log r \le O(1).$$

Mà $n \ge 25$ nên trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2. $A.B = 1$ tức là $f^n f(qz+c).g^n g(qz+c) = 1$. Theo Bổ đề 2.7i) suy ra $f = \dfrac{l}{g}$ với $l^{n+1} = 1$.

Trường hợp 3. $A = B$ tức là $f^n f(qz+c) = g^n g(qz+c)$. Theo Bổ đề 2.7ii) suy ra $f = hg$ với $h^{n+1} = 1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. Ritt (1922), "Prime and composite polynomials", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23(1)**, pp.51-66.

[2] W.K. Hayman (1967), *Research problems in Function Theory*, The Athlone Press University of London, London.

[3] C.C. Yang, X.H. Hua (1997), "Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **22**, pp.395-406.

[4] Vu Hoai An, Pham Ngoc Hoa (2012), *A version of the Hayman conjecture for p-adic several variables difference polynomials*, Interactions between real and complex analysis, Sci. Technics Publ. House, Hanoi, pp.152-161.

[5] Vu Hoai An, Pham Ngoc Hoa, and Ha Huy Khoai (2017), "Value sharing problems for differential and difference polynomials of meromorphic functions in a non-Archimedean field", *Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, **9(1)**, pp.1-14.

[6] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2012), "Value sharing problem for *p-adic* meromorphic functions and their difference operators and difference polynomials", Ukranian Math. J., **64(2)**, pp.147-164.

[7] Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai (2012), "Value sharing problem and Uniqueness for *p-adic* meromorphic functions", *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **38**, pp.71-92.