HNUE JOURNAL OF SCIENCE DOI: 10.18173/2354-1059.2019-0001
Natural Sciences, 2019, Volume 64, Issue 3, pp. 3-17
This paper is available online at http://stdb.hnue.edu.vn

XÂY DỰNG LƯỢC ĐỒ XẤP XỈ ỔN ĐỊNH CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN KHÔNG ÔTÔNÔM VỚI HỆ SỐ KHUẾCH TÁN LIÊN TỤC HÖLDER

Lương Đức Trọng và Kiều Trung Thủy
Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Tóm tắt. Bài báo nghiên cứu xây dựng một lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama cải tiến cho phương trình vi phân ngẫu nhiên không thuần nhất với hệ số khuếch tán liên tục Hölder. Kết quả cho thấy lược đồ mới bảo toàn tính chất ổn định mũ và tính dương của nghiệm đúng.
Từ khoá: Liên tục Hölder, ổn định mũ, phương trình vi phân ngẫu nhiên, xấp xỉ Euler-Maruyama.

1. Mở đầu

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu phép xấp xỉ và tính ổn định của nghiệm xấp xỉ cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên (PTVPNN) không thuần nhất có dạng

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad x_0 \in \mathbb{R}, t \in [0, +\infty), \tag{1.1}$$

với $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ là một chuyển động Brown tiêu chuẩn xác định trên một không gian xác suất có lọc $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ thỏa mãn điều kiện thông thường và b, σ là các hàm thực đo được.

PTVPNN đã và đang được sử dụng một cách rộng rãi để mô phỏng nhiều quá trình ngẫu nhiên trong thực tế như giá trị tài sản, lãi suất trong toán tài chính, số lượng cá thể trong Sinh học hay chuyển động của vật thể trong Vật lí... Trong các ứng dụng đó, ta thường phải tính toán kì vọng có dạng $\mathbb{E}[f(X_t, 0 \leq t \leq T)]$ với f là một phiếm hàm từ $C[0, T]$ vào $\mathbb{R}$. Trong phần lớn các trường hợp, việc tìm ra một biểu thức giải tích để tính $\mathbb{E}[f(X_t, 0 \leq t \leq T)]$ là rất khó khăn. Vì vậy, người ta thường tìm cách xấp xỉ X bởi đại lượng $X^{(n)}$ có thể mô phỏng được trên máy tính. Sau đó kì vọng $\mathbb{E}[f(X_t, 0 \leq t \leq T)]$ được tính thông qua thuật toán lặp Monte-Carlo hoặc Monte-Carlo cải tiến. Đối với những phương trình có hệ số Lipschitz và đủ trơn, có khá nhiều phép xấp xỉ với tốc độ cao đã được xây dựng như phương pháp xấp xỉ Euler-Maruyama, xấp xỉ Milstein, phương pháp toán tử Kusuoka (xem [1, 2]). Tuy nhiên, khi hệ số của phương trình không

Ngày nhận bài: 7/3/2019. Ngày sửa bài: 21/3/2019. Ngày nhận đăng: 28/3/2019.
Liên hệ: Kiều Trung Thủy, địa chỉ e-mail: thuykt@hnue.edu.vn

Lipschitz hoặc không đủ trơn, các phương pháp trên không áp dụng được. Ví dụ như khi hệ số phương trình tăng trên tuyến tính, trong [3], Hutzenthaler và các cộng sự đã chỉ ra rằng phương pháp xấp xỉ Euler-Maruyama không hội tụ theo cả nghĩa mạnh và yếu. Lược đồ Euler dạng ẩn đã được sử dụng một cách khá phổ biến để xấp xỉ nghiệm của phương trình có hệ số tăng nhanh. Tuy nhiên phép xấp xỉ này yêu cầu phải giải một hệ phương trình đại số ở mỗi bước xấp xỉ dẫn đến thời gian tính toán thường là rất lớn. Phương pháp Euler khống chế được giới thiệu gần đây bởi Hutzenthaler và các cộng sự trong [4] để xấp xỉ nghiệm phương trình có hệ số tăng trên tuyến tính và thoả mãn điều kiện Lipschitz địa phương. Đây là một phương pháp dạng hiển, không đòi hỏi phải giải hệ phương trình đại số trung gian nên có thời gian tính toán nhanh. Khi hệ số của phương trình thoả mãn thêm điều kiện Lipschitz một phía, phương pháp Euler khống chế có thể đạt được tốc độ hội tụ tối ưu $1/2$ trong không gian L^p. Gần đây phương pháp Euler khống chế được phát triển rất mạnh mẽ (xem [3, 5-8]).

Trong nhiều ứng dụng, người ta còn phải làm việc với các phương trình với hệ số không Lipschitz địa phương. Ví dụ như trong mô hình Cox-Ingesoll-Ross cho lãi suất ngắn hạn, hệ số khuếch tán của phương trình chỉ liên tục theo nghĩa Hölder. Hefter và Jentzent đã chỉ ra rằng với các phương trình như vậy tốc độ hội tụ theo nghĩa mạnh của các lược đồ xấp xỉ có thể rất thấp (xem [9]). Mặt khác, trong [10], Gyöngy và Rásonyi đã chỉ ra rằng nếu hệ số khuếch tán σ là liên tục theo nghĩa Hölder với cấp $\frac{1}{2}+\alpha$ và hệ số trôi b là Lipschitz thì lược đồ Euler-Maruyama hội tụ với tốc độ α trong không gian L^1. Kết quả của Gyöngy và Rásonyi nhận được rất nhiều sự chú ý và liên tục được mở rộng trong các bài báo [7, 11-13].

Bên cạnh bài toán xấp xỉ nghiệm, bài toán nghiên cứu sự ổn định của nghiệm cũng có ý nghĩa quan trọng và được nghiên cứu sâu rộng. Ví dụ như trong sinh học, người ta quan tâm đến sự tồn tại hay tuyệt chủng của một loài nào đó trong tương lai. Các kết quả về tính ổn định của nghiệm PTVPNN có thể được tìm thấy trong các tài liệu kinh điển như [14, 15]. Trong nhiều trường hợp, ta phải ước tính giá trị của nghiệm ổn định trong tương lai xa mặc dù đại lượng này có thể rất nhỏ. Vậy nên gần đây có khá nhiều nghiên cứu nhằm xây dựng nghiệm xấp xỉ cũng có tính chất ổn định như nghiệm đúng. Trong [16], Saito và Mitsui nghiên cứu tính ổn định của nghiệm xấp xỉ cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính. Các kết quả đó được tiếp tục mở rộng cho các PTVPNN tổng quát hơn với hệ số thoả mãn điều kiện Lipschitz và Lipschitz địa phương trong các bài báo [14, 17-19]. Do xấp xỉ Euler-Maruyama hay Milstein không giữ được tính ổn định của nghiệm đúng nên người ta đã nghiên cứu các phương pháp khác như phương pháp θ-Euler Maruyama ẩn hay Euler khống chế (xem [17, 19-22]).

Trong bài báo này chúng tôi xây dựng một lớp các lược đồ mới dưới dạng hiển để xấp xỉ nghiệm PTVPNN không thuần nhất với hệ số khuếch tán liên tục Hölder. Các lược đồ này có cùng tốc độ hội tụ trong L^1 với lược đồ Euler-Maruyama thông thường (xem [10]). Sau đó, chúng tôi chỉ ra một lược đồ cụ thể trong lớp mới đó mà nó bảo toàn tính chất ổn định mũ của nghiệm đúng. Hơn nữa, ta cũng có thể điều chỉnh lược đồ này để nó có thể bảo toàn tính chất không âm của nghiệm đúng. Lưu ý rằng do hệ số khuếch tán chỉ liên tục Hölder nên không thể đánh giá trực tiếp moment bậc hai của nghiệm như các nghiên cứu trước đây. Do đó, chúng tôi phải đánh giá moment bậc một của nghiệm thông qua phép xấp xỉ Yamada-Watanabe cho hàm $y = |x|$. Hơn nữa, để đánh giá chặt tốc độ hội tụ tiệm cận của nghiệm trong không gian L^p, chúng tôi đã phát triển phép xấp xỉ này cho hàm $y = |x|^p$.

2. Lược đồ Euler cải tiến

2.1. Giả thiết

Ta đưa ra một số giả thiết cho các hệ số b và σ của phương trình (1.1).

A1. Tồn tại một hằng số thực dương L_1 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, với mọi $t \in [0, +\infty)$,

$$(x-y)(b(t,x) - b(t,y)) \leq -L_1|x-y|^2.$$

A2. Tồn tại các hằng số thực dương L_2 và $\alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, với mọi $t \in [0, +\infty)$,

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq L_2|x-y| \quad \text{và} \quad |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L_2|x-y|^{1/2+\alpha}.$$

A3. Tồn tại các hằng số thực dương L_3 và $\beta \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, với mọi $t \in [0, +\infty)$,

$$|b(t,x) - b(s,x)| \vee |\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| \leq L_3|t-s|^{\beta}.$$

A4. Tồn tại hằng số thực dương L sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, với mọi $t \in [0, +\infty)$,

$$|b(t,x)|^2 \vee |\sigma(t,x)|^2 \leq L(1 + |x|^2).$$

Dưới các điều kiện **A2-A4**, phương trình (1.1) có nghiệm duy nhất theo nghĩa mạnh (xem [23]).

2.2. Lược đồ Euler cải tiến

Với mỗi $h > 0$, xét các hàm đo được $b_h, \sigma_h : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn: Với mỗi $T > 0$, tồn tại các hằng số M_1, M_2 và M_3 sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

C1. $\sup_{0 \leq t \leq T} |b_h(t,x)|^2 \vee \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma_h(t,x)|^2 \leq M_1(1 + |x|^2)$;

C2. $\sup_{0 \leq t \leq T} |b(t,x) - b_h(t,x)|^2 \leq M_2(1 + |x|^2)h^2$;

C3. $\sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t,x) - \sigma_h(t,x)|^2 \leq M_3(1 + |x|^4)h$.

Khi đó, ta xấp xỉ X bởi quá trình X^h được xác định bởi

$$X_t^h = x_0 + \int_0^t b_h(\eta_h(s), X_{\eta_h(s)}^h)ds + \int_0^t \sigma_h(\eta_h(s), X_{\eta_h(s)}^h)dW_s, \quad t \in [0, +\infty), \tag{2.1}$$

trong đó $\eta_h(t) = kh$ nếu $t \in [kh, (k+1)h)$ với $k = 0, 1, \ldots$.

Điều này tương đương với

$$X_t^h = X_{\eta_h(t)}^h + b_h(\eta_h(t), X_{\eta_h(t)}^h)(t - \eta_h(t)) + \sigma_h(\eta_h(t), X_{\eta_h(t)}^h)\left(W_t - W_{\eta_h(t)}\right), \quad t \in [0, +\infty). \tag{2.2}$$

3. Sự hội tụ

Sự hội tụ của lược đồ Euler-Maruyama cải tiến theo chuẩn L^1 và chuẩn L^1-sup được phát biểu trong định lí sau.

Định lí 3.1. *Giả sử các giả thiết **A2 - A4** và các điều kiện **C1 - C3** được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại hằng số $C = C(x_0, L_2, L_3, L, T, M_1, M_2, M_3)$ không phụ thuộc h sao cho*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[|X^h_{t\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau}|] \le \begin{cases} Ch^\alpha & \text{nếu } 0 < \alpha \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{C}{\log(1/h)} & \text{nếu } \alpha = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

với mọi thời điểm dừng τ. Hơn nữa,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |X^h_t - X_t|\right] \le \begin{cases} Ch^{2\alpha^2} & \text{nếu } 0 < \alpha \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{C}{\sqrt{\log(1/h)}} & \text{nếu } \alpha = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Lược đồ Euler-Maruyama cải tiến (2.1) hội tụ theo chuẩn L^1 và chuẩn L^1-sup cùng tốc độ với lược đồ Euler-Maruyama thông thường khi áp dụng cho PTVPNN với hệ số liên tục Hölder (xem [10]). Sau đây, ta sẽ trình bày chứng minh của Định lí 3.1.

3.1. Ước lượng mô-men

Bổ đề 3.1. *Giả sử giả thiết **A4** và điều kiện **C1** được thỏa mãn.*

(i) Với mỗi $p > 0$, tồn tại một hằng số dương $C_1 = C_1(p, x_0, T, L)$ sao cho

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |X_t|^p\right] \le C_1. \tag{3.3}$$

(ii) Với mỗi $p \ge 2$, tồn tại các hằng số dương $C_2 = C_2(p, x_0, T, L, M_1)$ và $C_3 = C_3(p, x_0, T, L, M_1)$ sao cho

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |X^h_t|^p\right] \le C_2 \tag{3.4}$$

và

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left[|X^h_t - X^h_{\eta_h(t)}|^p\right] \le C_3 h^{p/2}. \tag{3.5}$$

Chứng minh. Vì đánh giá (3.3) là một kết quả quen thuộc nên chúng tôi bỏ qua chứng minh. Đánh giá (3.4) cũng được suy ra từ các kết quả cơ bản kết hợp với điều kiện **C1**. Để chứng minh (3.5), ta viết

$$\begin{aligned} \left|X^h_t - X^h_{\eta_h(t)}\right|^p &\le 2^{p-1}\left(\left|b_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(t)})h\right|^p + \left|\sigma_h(\eta_h(t), X^h_{\eta_h(t)})(W_t - W_{\eta_h(t)})\right|^p\right) \\ &\le 2^{p-1} M_1^{p/2}(1 + |X^h_{\eta_h(t)}|^2)^{p/2}(h^p + |W_t - W_{\eta_h(t)}|^p). \end{aligned}$$

Điều này cùng với (3.4) suy ra điều phải chứng minh. □

3.2. Phép xấp xỉ Yamada-Watanabe

Ở phần này, chúng tôi trình bày một cải tiến của kĩ thuật xấp xỉ Yamada và Watanabe (xem [10, 24]). Đầu tiên, chú ý rằng với mỗi $p \geq 1, \delta > 1$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại một hằng số dương $K(p, \delta)$ và một hàm liên tục $\psi_{\delta\varepsilon}(p, .) : \mathbb{R}^{+\text{‘}} \to \mathbb{R}^+$ sao cho

(i) $\int_{\varepsilon/\delta}^{\varepsilon} \psi_{\delta\varepsilon}(p, z)dz = p\varepsilon^{p-1}$,

(ii) $0 \leq \psi_{\delta\varepsilon}(p, z) \leq K(p, \delta)z^{p-2}$ với $z \in \left[\frac{\varepsilon}{\delta}, \varepsilon\right]$; $\psi_{\delta\varepsilon}(p, z) = 0$ với $z \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\delta}\right)$; và $\psi_{\delta\varepsilon}(p, z) = p(p-1)z^{p-2}$ với $z \in (\varepsilon, +\infty)$.

Ta sẽ xấp xỉ hàm $x \mapsto |x|^p$ bằng hàm $\phi_{\delta\varepsilon}$ được xác định bởi

$$\phi_{\delta\varepsilon}(p, x) := \int_0^{|x|} \int_0^y \psi_{\delta\varepsilon}(p, z)dzdy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được $\phi_{\delta\varepsilon}$ có các tính chất sau: với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì

T1. $\phi'_{\delta\varepsilon}(p, x) = \dfrac{x}{|x|}\phi'_{\delta\varepsilon}(p, |x|)$, trong đó $\phi'_{\delta\varepsilon}(p, x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\phi_{\delta\varepsilon}(p, x)$;

T2. $p|x|^{p-1}\mathbb{I}_{(\varepsilon;+\infty)}(x) \leq |\phi'_{\delta\varepsilon}(p, x)| \leq p\varepsilon^{p-1}\mathbb{I}_{[\frac{\varepsilon}{\delta};\varepsilon]}(x) + p|x|^{p-1}\mathbb{I}_{(\varepsilon;+\infty)}(x)$;

T3. $\phi_{\delta\varepsilon}(p, x) - p\varepsilon^p \leq |x|^p \leq \varepsilon^p + \phi_{\delta\varepsilon}(p, x)$;

T4. $\dfrac{\phi'_{\delta\varepsilon}(p, |x|)}{|x|^p} \leq \dfrac{p\delta^p}{\varepsilon}$;

T5. $\phi''_{\delta\varepsilon}(p, |x|) = \psi^{(p)}_{\delta\varepsilon}(|x|) \leq K(p, \delta)|x|^{p-2}\mathbb{I}_{[\frac{\varepsilon}{\delta};\varepsilon]}(|x|) + p(p-1)|x|^{p-2}\mathbb{I}_{(\varepsilon;+\infty)}(x)$, trong đó $\phi''_{\delta\varepsilon}(p, x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_{\delta\varepsilon}(p, x)$.

Trong trường hợp $p = 1$, ta có thể chọn $K(1, \delta) = \dfrac{2}{\log \delta}$. Hơn nữa, để đơn giản, ta sẽ kí hiệu $\phi_{\delta\varepsilon}(x) = \phi_{\delta\varepsilon}(1, x)$.

3.3. Chứng minh Định lí 3.1

Ở phần này, các hằng số sẽ đều được kí hiệu chung là C, chúng đều độc lập với h nhưng có thể phụ thuộc vào $x_0, L_2, L_3, L, T, M_1, M_2, M_3$ và α.

Đặt $Y_t^h = X_t - X_t^h$. Sử dụng tính chất **T3** và công thức Itô, ta có

$$
\begin{aligned}
|Y_t^h| &\le \varepsilon + \phi_{\delta\varepsilon}(Y_t^h) \\
&\le \varepsilon + \int_0^t \Big\{ \phi'_{\delta\varepsilon}(Y_s^h) \Big[b(s, X_s) - b_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big] \\
&\qquad + \frac{\phi''_{\delta\varepsilon}(Y_s^h)}{2} \Big[\sigma(s, X_s) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big]^2 \Big\} ds \\
&\qquad + \int_0^t \phi'_{\delta\varepsilon}(Y_s^h) \Big[\sigma(s, X_s) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big] dW_s.
\end{aligned}
$$

Do đó, với mọi thời điểm dừng τ, ta có

$$
|Y^h_{t\wedge\tau}| \le \varepsilon + J_1(t\wedge\tau) + J_2(t\wedge\tau) + J_3(t\wedge\tau), \tag{3.6}
$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
J_1(t) &= \int_0^t \phi'_{\delta\varepsilon}(Y_s^h) \Big[b(s, X_s) - b_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big] ds, \\
J_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \phi''_{\delta\varepsilon}(Y_s^h) \Big[\sigma(s, X_s) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big]^2 ds, \\
J_3(t) &= \int_0^t \phi'_{\delta\varepsilon}(Y_s^h) \Big[\sigma(s, X_s) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big] dW_s.
\end{aligned}
$$

Đầu tiên, ta chú ý rằng, nếu $0 < s < t\wedge\tau$ thì theo tính chất **T2** và các giả thiết **A2, A3**, ta có

$$
\begin{aligned}
&\Big| \phi'_{\delta\varepsilon}(Y_s^h) \Big[b(s, X_s) - b_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big] \Big| \\
&\le \Big| b(s, X_s) - b(s, X_s^h) \Big| + \Big| b(s, X_s^h) - b(s, X^h_{\eta_h(s)}) \Big| \\
&+ \Big| b(s, X^h_{\eta_h(s)}) - b(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big| + \Big| b(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) - b_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big| \\
&\le L_2|X_s - X_s^h| + L_2|X_s^h - X^h_{\eta_h(s)}| + L_3|s - \eta_h(s)|^\beta + \Big| b(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) - b_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) \Big|.
\end{aligned}
$$

Do đó, từ điều kiện **C2** và Bổ đề 3.1, ta suy ra

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t} |J_1(s\wedge\tau)|] &\le L_2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau} |Y_s^h| ds \Big] + L_2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau} |X_s^h - X^h_{\eta_h(s)}| ds \Big] \\
&\quad + L_3 h^\beta \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau} ds \Big] + M_2 h \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau} (1 + |X^h_{\eta_h(s)}|) ds \Big] \\
&\le L_2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau} |Y^h_{s\wedge\tau}| ds \Big] + L_2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t} |X_s^h - X^h_{\eta_h(s)}| ds \Big] \\
&\quad + M_2 h \mathbb{E}\Big[\int_0^{t} (1 + |X^h_{\eta_h(s)}|) ds \Big] + L_3 T h^\beta \\
&\le L_2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t} |Y^h_{s\wedge\tau}| ds \Big] + C\sqrt{h}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Tiếp theo, với $0 < s < t \wedge \tau$, từ các giả thiết **A2** và **A3**, ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\Big[\sigma(s, X_s) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)})\Big]^2 \\
&\le 4\Big[\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X^h_s)\Big]^2 + 4\Big[\sigma(s, X^h_s) - \sigma(s, X^h_{\eta_h(s)})\Big]^2 \\
&\quad + 4\Big[\sigma(s, X^h_{\eta_h(s)}) - \sigma(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)})\Big]^2 + 4\Big[\sigma(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)})\Big]^2 \\
&\le 4L_2^2|Y^h_s|^{1+2\alpha} + 4L_2^2|X^h_s - X^h_{\eta_h(s)}|^{1+2\alpha} + 4L_3^2|s - \eta_h(s)|^{2\beta} \\
&\quad + 4\Big[\sigma(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)}) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)})\Big]^2. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Từ tính chất **T5**, điều kiện **C3** và Bổ đề 3.1, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|J_2(s\wedge\tau)|] &\le \frac{4}{\log\delta}\left\{L_2^2\varepsilon^{2\alpha}T + \frac{L_2^2\delta}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}|X^h_s - X^h_{\eta_h(s)}|^{1+2\alpha}ds\right] + \frac{M_3 h\delta}{\varepsilon} + L_3^2 h^{2\beta}T\right\} \\
&\le \frac{4}{\log\delta}\left\{L_2^2\varepsilon^{2\alpha}T + \frac{L_2^2\delta}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^{t}|X^h_s - X^h_{\eta_h(s)}|^{1+2\alpha}ds\right] + \frac{M_3 h\delta}{\varepsilon} + L_3^2 h^{2\beta}T\right\} \\
&\le \frac{4C}{\log\delta}\left\{\varepsilon^{2\alpha} + \frac{h^{1/2+\alpha}\delta}{\varepsilon} + h\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+1\right)\right\}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Kết hợp đánh giá này với các đánh giá (3.6), (3.7), ta suy ra

$$\mathbb{E}\left[|Y^h_{t\wedge\tau}|\right] \le \varepsilon + L_2\int_0^t \mathbb{E}\left[|Y^h_{s\wedge\tau}|\right]ds + C\sqrt{h} + \frac{4C}{\log\delta}\left\{\varepsilon^{2\alpha} + \frac{h^{1/2+\alpha}\delta}{\varepsilon} + h\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+1\right)\right\}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta thu được

$$\mathbb{E}\left[|Y^h_{t\wedge\tau}|\right] \le \left(\varepsilon + C\sqrt{h} + \frac{4C}{\log\delta}\left\{\varepsilon^{2\alpha} + \frac{h^{1/2+\alpha}\delta}{\varepsilon} + h\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+1\right)\right\}\right)e^{L_2 t}. \qquad (3.10)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Burkholder-Davis-Gundy, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\sup_{0\le t\le T}J_3(t\wedge\tau)\right|\right] &\le C\mathbb{E}\left[\left\{\int_0^{T\wedge\tau}\left|\sigma(s,X_s) - \sigma_h(\eta_h(s), X^h_{\eta_h(s)})\right|^2 ds\right\}^{1/2}\right] \\
&\le C\mathbb{E}\left[\left\{\int_0^T |Y^h_{s\wedge\tau}|^{1+2\alpha}ds\right\}^{1/2}\right] + C\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|X^h_s - X^h_{\eta_h(s)}\right|^{1+2\alpha}ds\right]\right\}^{1/2} \\
&\quad + C\sqrt{h}\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(|X_{\eta_h(s)}|^4+1\right)ds\right]\right\}^{1/2} + Ch^{\beta},
\end{aligned}$$

trong đó ta sử dụng (3.8) cho đánh giá cuối cùng. Từ Bổ đề 3.1,

$$\mathbb{E}\left[\left|\sup_{0\le t\le T}J_3(t\wedge\tau)\right|\right] \le C\mathbb{E}\left[\left\{\int_0^T|Y^h_{s\wedge\tau}|^{1+2\alpha}ds\right\}^{1/2}\right] + Ch^{(1+2\alpha)/4}. \qquad (3.11)$$

Nếu $\alpha = 0$, bằng cách chọn $\varepsilon = h^{1/4}$ và $\delta = h^{-1/4}$ trong (3.10), ta có $\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}[|Y^h_{t\wedge\tau}|] \le \frac{C}{\log\frac{1}{h}}$. Kết hợp điều này với (3.6), (3.7), (3.9), và (3.11), ta suy ra $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y^h_t|\right] \le \frac{C}{\sqrt{\log\frac{1}{h}}}$.

Nếu $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, theo đánh giá (3.11), bất đẳng thức Young và bất đẳng thức Holder,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\sup_{0\le t\le T} J_3(t\wedge\tau)\right|\right] &\le C\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\le t\le T}|Y^h_{t\wedge\tau}|\int_0^T |Y^h_{s\wedge\tau}|ds\right)^{1/2}\right] + Ch^{(1+2\alpha)/4}\\ &\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y^h_{t\wedge\tau}|\right] + C\int_0^T\left(\mathbb{E}[|Y^h_{s\wedge\tau}|]\right)^{2\alpha}ds + Ch^{(1+2\alpha)/4}.\end{aligned}$$

Ta kết hợp với các đánh giá (3.6), (3.7), (3.9) thì thu được

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y^h_{t\wedge\tau}|\right] &\le 2\varepsilon + 2L_2\int_0^T \mathbb{E}|Y^h_{s\wedge\tau}|ds + \frac{C}{\log\delta}\left\{\varepsilon^{2\alpha} + \frac{h^{1/2+\alpha}\delta}{\varepsilon} + h\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+1\right)\right\}\\ &\quad + C\int_0^T\left(\mathbb{E}[|Y^h_{s\wedge\tau}|]\right)^{2\alpha}ds + Ch^{(1+2\alpha)/4}. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Chọn $\delta = 2, \varepsilon = \sqrt{h}$ trong (3.10), ta có $\mathbb{E}\left[|Y^h_{t\wedge\tau}|\right] \le Ch^{\alpha}$. Điều này cùng với (3.12) dẫn đến

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y^h_t|\right] \le Ch^{2\alpha^2}.$$

4. Tính ổn định mũ trong không gian L^p

Trong [22], các tác giả đã chỉ ra tính ổn định mũ của nghiệm đúng X_t và xấp xỉ Euler-Maruyama theo chuẩn L^2 khi hệ số khuyếch tán σ liên tục Lipschitz địa phương. Ở đây, chúng tôi sẽ trình bày tính ổn định mũ của X_t và X^h_t khi σ liên tục Hölder. Lưu ý rằng điểm khó khăn cốt yếu ở đây là khi x gần 0, hệ số khuếch tán $\sigma(t,x)$ có bậc là $|x|^{\frac{1}{2}+\alpha}$ và lớn hơn rất nhiều so với $|x|$ là bậc của hệ số khuếch tán khi nó liên tục Hölder. Để khắc phục khó khăn này, ta sẽ sử dụng hàm $\phi_{\delta\epsilon}$ để đánh giá $|x|^p$.

Kí hiệu $\mathcal{T}$ là tập các thời điểm dừng hữu hạn. Định lí sau trình bày tính ổn định mũ của nghiệm đúng X_t.

Định lí 4.1. *Giả sử **A1** và **A2** được thỏa mãn, và $b(t,0) = \sigma(t,0) = 0$ với mọi $t \in [0,+\infty)$.*

(i) $(X_t)_{t\ge 0}$ ổn định mũ trong L^1, nghĩa là

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}\left[|X_\tau|e^{L_1\tau}\right] \le |x_0|^p.$$

Hơn nữa, với mỗi $q \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\ge 0}\left(|X_t|^q e^{L_1 qt}\right)\right] \le \frac{(2-q)|x_0|^q}{1-q}. \qquad (4.1)$$

(ii) Với mỗi $p > 1$, ta có

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}\left[|X_\tau|^p e^{\kappa\tau}\right] \leq |x_0|^p + \frac{p(p-1)(1-2\alpha)L_2^2|x_0|^\lambda}{2(p-\lambda)(\lambda L_1 - \kappa)}, \tag{4.2}$$

trong đó $\lambda = (p-1+2\alpha) \wedge 1$ và κ là một hằng số dương thỏa mãn $\kappa < \lambda L_1$ và $0 < \kappa \leq pL_1 - \dfrac{L_2^2 p(p-1)(p-1+2\alpha-\lambda)}{2(p-\lambda)}$.

Tiếp theo, để xây dựng nghiệm xấp xỉ Euler-Maruyama cải tiến X_t^h một mặt hội tụ đến nghiệm đúng X_t như đã trình bày ở Định lí 3.1, mặt khác cũng ổn định mũ dưới cùng các giả thiết như Định lí 4.1, ta xét các hệ số b_h và σ_h được xác định như sau:

$$b_h(t,x) = \frac{b(t,x)}{1 - L_2^2 L_1^{-1} h}, \text{ và } \sigma_h(t,x) = \frac{\sigma(t,x)}{1 + h^{1/2} e^{2L_1 t}(|\sigma(t,x)| + 1)}. \tag{4.3}$$

Nếu $h \in \left(0, \dfrac{L_1}{2L_2^2}\right)$ và các giả thiết **A1, A2** và **A4** được thoả mãn thì b_h và σ_h thoả mãn các điều kiện **C1**–**C3**. Cụ thể, ta có

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T} |b_h(t,x)|^2 \vee \sup_{0\leq t\leq T} |\sigma_h(t,x)|^2 \leq 4L(1+|x|^2),\\
&\sup_{0\leq t\leq T} |b(t,x) - b_h(t,x)|^2 \leq \frac{4L_2^4 L^2}{L_1^2}(1+|x|^2)h^2,\\
&\sup_{0\leq t\leq T} |\sigma(t,x) - \sigma_h(t,x)|^2 \leq (4L+2)^2 e^{4L_1 T}(1+|x|^4)h.
\end{aligned}$$

Định lí 4.2. *Giả sử các giả thiết **A1** và **A2** được thỏa mãn, $b(t,0) = \sigma(t,0) = 0$ với mỗi $t \in [0,+\infty)$ và $0 < h < \frac{L_1}{2L_2^2} \wedge \frac{1}{2L_1}$. Giả sử b_h và σ_h được xác định bởi* (4.3)*. Khi đó, tồn tại một hằng số dương $C = C(x_0, L_1, L_2)$ sao cho*

$$\mathbb{E}\left[|X_t^h|^2 e^{2L_1 t}\right] \leq \frac{C}{h}. \tag{4.4}$$

Đặc biệt, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[|X_t^h|^2 e^{(2L_1-\varepsilon)t}\right] = 0. \tag{4.5}$$

4.1. Chứng minh Định lí 4.1

Bổ đề 4.1 ([25])**.** *Cho $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ là một quá trình ngẫu nhiên dương, tương thích và liên tục phải; A là một quá trình liên tục, tăng thỏa mãn*

$$\mathbb{E}[\xi_\tau|\mathcal{F}_0] \leq \mathbb{E}[A_\tau|\mathcal{F}_0] \quad h.c.c.,$$

với mọi thời điểm dừng bị chặn τ. Khi đó, với mọi $\lambda \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0} \xi_t\right)^\lambda\right] \leq \left(\frac{2-\lambda}{1-\lambda}\right) \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0} A_t\right)^\lambda\right].$$

Trở lại với chứng minh Định lí 4.1. Áp dụng công thức Itô cho $e^{\kappa t}\phi_{\delta\varepsilon}(p,x)$ với $\kappa > 0$ và $p \geq 1$, và tính chất **T3**, ta thu được

$$\begin{aligned}|X_t|^p e^{\kappa t} &\leq \varepsilon^p e^{\kappa t} + \phi_{\delta\varepsilon}(p, X_t)\, e^{\kappa t}\\ &\leq \varepsilon^p e^{\kappa t} + p\varepsilon^p + |x_0|^p + \int_0^t e^{\kappa s}\phi'_{\delta\varepsilon}(p,X_s)\sigma(s,X_s)dW_s\\ &\quad + \int_0^t e^{\kappa s}\left[\phi'_{\delta\varepsilon}(p,X_s)b(s,X_s) + \frac{1}{2}\phi''_{\delta\varepsilon}(p,X_s)\sigma^2(s,X_s) + \kappa|X_s|^p + \kappa p\varepsilon^p\right]ds.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Theo các tính chất **T1, T2** và các giả thiết **A1,A2**, ta có

$$\begin{aligned}\phi'_{\delta\varepsilon}(p,X_s)b(s,X_s) &= \phi'_{\delta\varepsilon}(p,X_s)\, b(s,X_s)\mathbb{I}_{\{|X_s|\leq\varepsilon\}} + \frac{\phi'_{\delta\varepsilon}(p,|X_s|)}{|X_s|}X_s b(s,X_s)\mathbb{I}_{\{|X_s|>\varepsilon\}}\\ &\leq p\varepsilon^{p-1}|b(s,X_s)|\mathbb{I}_{\{|X_s|\leq\varepsilon\}} - pL_1|X_s|^p\mathbb{I}_{\{|X_s|>\varepsilon\}}\\ &\leq pL_2\varepsilon^p\mathbb{I}_{\{|X_s|\leq\varepsilon\}} - pL_1|X_s|^p(1-\mathbb{I}_{\{|X_s|\leq\varepsilon\}})\\ &\leq p(L_1+L_2)\varepsilon^p - pL_1|X_s|^p.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Từ điều kiện **A2** và tính chất **T5** thì

$$\begin{aligned}&\phi''_{\delta\varepsilon}(p,X_s)\sigma^2(s,X_s) = \phi''_{\delta\varepsilon}(p,|X_s|)\sigma^2(s,X_s)\\ &\leq K(p,\delta)L_2^2|X_s|^{p-1+2\alpha}\mathbb{I}_{[\frac{\varepsilon}{\delta};\varepsilon]}(|X_s|) + L_2^2p(p-1)|X_s|^{p-1+2\alpha}\mathbb{I}_{(\varepsilon;+\infty)}(|X_s|)\\ &\leq K(p,\delta)L_2^2\varepsilon^{p-1+2\alpha} + L_2^2p(p-1)|X_s|^{p-1+2\alpha}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Kết hợp (4.6), (4.7), và (4.8), ta có

$$\begin{aligned}|X_t|^p e^{\kappa t} &\leq \varepsilon^p e^{\kappa t} + p\varepsilon^p + |x_0|^p + \int_0^t e^{\kappa s}\phi'_{\delta\varepsilon}(X_s)\sigma(s,X_s)dW_s\\ &\quad + \int_0^t e^{\kappa s}\left[p(L_1+L_2)\varepsilon^p - pL_1|X_s|^p + \frac{1}{2}K(p,\delta)L_2^2\varepsilon^{p-1+2\alpha}\right]ds\\ &\quad + \int_0^t e^{\kappa s}\left[\frac{p(p-1)L_2^2}{2}|X_s|^{p-1+2\alpha} + \kappa|X_s|^p + \kappa p\varepsilon^p\right]ds\\ &\leq \varepsilon^p e^{\kappa t} + p\varepsilon^p + |x_0|^p + \int_0^t e^{\kappa s}\phi'_{\delta\varepsilon}(X_s)\sigma(s,X_s)dW_s\\ &\quad + \left[p(L_1+L_2)\varepsilon^p + \frac{1}{2}K(p,\delta)L_2^2\varepsilon^{p-1+2\alpha} + \kappa p\varepsilon^p\right]\left(\frac{e^{\kappa t}-1}{\kappa}\right)\\ &\quad + \int_0^t e^{\kappa s}\left[(\kappa - pL_1)|X_s|^p + \frac{p(p-1)L_2^2}{2}|X_s|^{p-1+2\alpha}\right]ds.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Phần (i): Xét $p=1$. Ta chọn $K(1,\delta) = \dfrac{2}{\log\delta}$, và $\kappa = L_1$, thì với mỗi $N>0, \varepsilon>0$, và thời điểm dừng hữu hạn τ, ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_{\tau\wedge N}|e^{L_1(\tau\wedge T)}] &\le \varepsilon\mathbb{E}\left[e^{L_1(\tau\wedge N)}\right] + \varepsilon + |x_0| + \left[(2L_1+L_2)\varepsilon + \frac{L_2^2\varepsilon^{2\alpha}}{\log\delta}\right]\mathbb{E}\left[\frac{e^{L_1(\tau\wedge N)}-1}{L_1}\right]\\ &\le \varepsilon\left(e^{L_1N}+1\right) + |x_0| + \left[(2L_1+L_2)\varepsilon + \frac{L_2^2\varepsilon^{2\alpha}}{\log\delta}\right]\left(\frac{e^{L_1N}-1}{L_1}\right).\end{aligned}$$

Đầu tiên, cho $\delta\uparrow\infty$, và sau đó cho $\varepsilon\downarrow 0$, ta có $\mathbb{E}[|X_{\tau\wedge N}|e^{L_1(\tau\wedge N)}] \le |x_0|$. Vì $|X_{\tau\wedge N}|e^{L_1(\tau\wedge N)} \xrightarrow{h.c.c} X_\tau e^{L_1\tau}$ khi $N\to\infty$ nên theo Bổ đề Fatou, ta thu được

$$\mathbb{E}\left[|X_\tau|e^{L_1\tau}\right] \le |x_0|. \tag{4.10}$$

Điều này cùng với Bổ đề 4.1 suy ra (4.1).

Phần (ii): Xét $p>1$. Vì $0<\lambda<1\wedge(p-1+2\alpha)$ nên sử dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$|X_s|^{p-1+2\alpha} \le \frac{1-2\alpha}{p-\lambda}|X_s|^\lambda + \frac{p-1+2\alpha-\lambda}{p-\lambda}|X_s|^p.$$

Từ (4.9),

$$\begin{aligned}|X_t|^pe^{\kappa t} &\le \varepsilon^pe^{\kappa t} + p\varepsilon^p + |x_0|^p + \int_0^t e^{\kappa s}\phi'_{\delta\varepsilon}(X_s)\sigma(s,X_s)dW_s\\ &\quad + \left[p(L_1+L_2+\kappa)\varepsilon^p + \frac{1}{2}K(p,\delta)L_2^2\varepsilon^{p-1+2\alpha}\right]\left(\frac{e^{\kappa t}-1}{\kappa}\right)\\ &\quad + \int_0^t e^{\kappa s}\left(\kappa - pL_1 + \frac{p(p-1)(p-1+2\alpha-\lambda)L_2^2}{2(p-\lambda)}\right)|X_s|^pds\\ &\quad + \int_0^t e^{\kappa s}\frac{p(p-1)(1-2\alpha)L_2^2}{2(p-\lambda)}|X_s|^\lambda ds\\ &\le \varepsilon^pe^{\kappa t} + p\varepsilon^p + |x_0|^p + \int_0^t e^{\kappa s}\phi'_{\delta\varepsilon}(X_s)\sigma(s,X_s)dW_s\\ &\quad + \left[p(L_1+L_2+\kappa)\varepsilon^p + \frac{1}{2}K(p,\delta)L_2^2\varepsilon^{p-1+2\alpha}\right]\left(\frac{e^{\kappa t}-1}{\kappa}\right)\\ &\quad + \int_0^t e^{\kappa s}\frac{p(p-1)(1-2\alpha)L_2^2}{2(p-\lambda)}|X_s|^\lambda ds,\end{aligned} \tag{4.11}$$

trong đó ta sử dụng đánh giá $\kappa \le pL_1 - \dfrac{L_2^2p(p-1)(p-1+2\alpha-\lambda)}{2(p-\lambda)}$. Với mỗi $N>0,\ \varepsilon>0,$ và thời điểm dừng τ hữu hạn,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_{\tau\wedge N}|^pe^{\kappa(\tau\wedge N)}\right] &\le \varepsilon^pe^{\kappa N} + p\varepsilon^p + |x_0|^p\\ &\quad + \left[p(L_1+L_2+\kappa)\varepsilon^p + \frac{1}{2}K(p,\delta)L_2^2\varepsilon^{p-1+2\alpha}\right]\left(\frac{e^{\kappa N}-1}{\kappa}\right)\\ &\quad + \int_0^N \frac{p(p-1)(1-2\alpha)L_2^2}{2(p-\lambda)}\mathbb{E}\left[e^{\kappa s}|X_s|^\lambda\right]ds.\end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \downarrow 0$, ta có

$$\mathbb{E}\left[|X_{\tau\wedge N}|^p e^{\kappa(\tau\wedge N)}\right] \le |x_0|^p + \int_0^N \frac{p(p-1)(1-2\alpha)L_2^2}{2(p-\lambda)}\mathbb{E}\left[e^{\kappa s}|X_s|^\lambda\right] ds.$$

Từ (4.10) và bất đẳng thức Hölder, ta có $\mathbb{E}\left[e^{\kappa s}|X_s|^\lambda\right] \le |x_0|^\lambda e^{(\kappa-\lambda L_1)s}$. Vì $\kappa < \lambda L_1$ nên

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_{\tau\wedge N}|^p e^{\kappa(\tau\wedge N)}\right] &\le |x_0|^p + \int_0^N \frac{p(p-1)(1-2\alpha)L_2^2}{2(p-\lambda)}|x_0|^\lambda e^{(\kappa-\lambda L_1)s} ds \\ &\le |x_0|^p + \frac{p(p-1)(1-2\alpha)L_2^2|x_0|^\lambda}{2(p-\lambda)(\lambda L_1-\kappa)}.\end{aligned}$$

Cho $N \uparrow \infty$ và áp dụng Bổ đề Fatou, ta thu được (4.2).

4.2. Chứng minh Định lí 4.2

Từ (2.2) ta có thể viết $\mathbb{E}\left[|X^h_{(k+1)h}|^2\right]$ thành

$$\mathbb{E}\left[|X^h_{kh}|^2\right] + 2h\mathbb{E}\left[X^h_{kh} b_h(kh, X^h_{kh})\right] + h^2\mathbb{E}\left[|b_h(kh, X^h_{kh})|^2\right] + h\mathbb{E}\left[|\sigma_h(kh, X^h_{kh})|^2\right].$$

Theo các giả thiết **A1**, **A2** và đánh giá $|\sigma_h(kh, X^h_{kh})| \le h^{-1/2}e^{-2L_1 kh}$, ta có

$$\mathbb{E}\left[|X^h_{(k+1)h}|^2\right] \le \left[1 - \frac{2L_1 h}{1-L_2^2L_1^{-1}h} + \frac{L_2^2h^2}{\left(1-L_2^2L_1^{-1}h\right)^2}\right]\mathbb{E}\left[|X^h_{kh}|^2\right] + e^{-4L_1kh}. \tag{4.12}$$

Vì $1 - \dfrac{2L_1 h}{1-L_2^2L_1^{-1}h} + \dfrac{L_2^2h^2}{\left(1-L_2^2L_1^{-1}h\right)^2} \le 1 - 2L_1 h$ khi $h < \dfrac{L_1}{2L_2^2} \wedge \dfrac{1}{2L_1}$, nên từ (4.12) ta suy ra

$$\mathbb{E}\left[|X^h_{kh}|^2\right] \le (1-2L_1h)^k|x_0|^2 + \sum_{i=0}^{k-1} e^{-4L_1(k-1-i)h}(1-2L_1h)^i.$$

Sử dụng đánh giá $e^x \ge x+1$, ta có

$$\mathbb{E}\left[|X^h_{kh}|^2\right] \le e^{-2L_1kh}|x_0|^2 + \sum_{i=0}^{k-1} e^{-4L_1(k-1-i)h-2L_1ih}.$$

Khi đó, sau vài đánh giá đơn giản, ta thu được

$$\mathbb{E}\left[|X^h_{kh}|^2\right] \le \frac{|x_0|^2+e^2}{2L_1}\frac{e^{-2L_1kh}}{h}. \tag{4.13}$$

Hơn nữa, từ (2.2), ta có

$$\mathbb{E}\left[|X^h_t|^2\right] \le 3\left\{\mathbb{E}\left[|X^h_{\eta_h(t)}|^2\right] + h^2\mathbb{E}\left[|b_h\left(\eta_h(t), X^h_{\eta_h(t)}\right)|^2\right] + h\mathbb{E}\left[|\sigma_h(\eta_h(t), X^h_{\eta_h(t)})|^2\right]\right\}.$$

Sử dụng lại các đánh giá $|b_h(t,x)| \le 2L_2|x|$ và $|\sigma_h(t,x)| \le h^{-1/2}e^{-2L_1t}$, ta thu được

$$\mathbb{E}\left[|X^h_t|^2\right] \le 3(1+4L_2^2h^2)\mathbb{E}\left[|X^h_{\eta_h(t)}|^2\right] + 3e^{-4L_1\eta_h(t)}.$$

Điều này kết hợp với (4.13) dẫn đến (4.4), trong khi (4.5) là một hệ quả trực tiếp của (4.4). Do đó, ta có điều phải chứng minh.

5. Lược đồ xấp xỉ không âm

Trong một số mô hình, nghiệm đúng X_t không âm. Đối với những mô hình này, ta cũng có thể xây dựng một nghiệm xấp xỉ không âm, ổn định, và hội tụ tới nghiệm đúng với cùng tốc độ như X_t^h. Thật vậy, ta sẽ chỉ ra rằng $\hat{X}_t^h = |X_t^h|$ chính là nghiệm xấp xỉ thỏa mãn các yếu tố trên.

Corollary 5.1. *Giả sử $X_t \geq 0$ hầu chắc chắn với mỗi $t \geq 0$. Xét lược đồ* (2.1) *với b_h và σ_h xác định bởi* (4.3) *và $0 < h < \frac{L_1}{2L_2^2} \wedge \frac{1}{2L_1}$. Đặt $\hat{X}_t^h = |X_t^h|$.*

*(i) Giả sử các giả thiết **A2–A4** được thỏa mãn, thì tồn tại một hằng số dương $C(x_0, L_2, L_3, L, T)$ sao cho*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[|\hat{X}_t^h - X_t|] \leq \begin{cases} Ch^\alpha & \text{nếu } 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{C}{\log(1/h)} & \text{nếu } \alpha = 0. \end{cases}$$

và

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\hat{X}_t^h - X_t|\right] \leq \begin{cases} Ch^{2\alpha^2} & \text{nếu } 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{C}{\sqrt{\log(1/h)}} & \text{nếu } \alpha = 0. \end{cases}$$

*(ii) Giả sử các giả thiết **A1** và **A2** được thỏa mãn. Giả sử $b(t,0) = \sigma(t,0) = 0$ với mọi $t \geq 0$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, ta đều có*

$$\limsup_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[|\hat{X}_t^h|^2 e^{(2L_1-\varepsilon)t}\right] = 0.$$

Chứng minh. Phần (i) suy ra từ Định lí 3.1 và chú ý sau $|\hat{X}_t^h - X_t| = \big||X_t^h| - |X_t|\big| \leq |X_t^h - X_t|$. Phần (ii) suy ra trực tiếp từ Định lí 4.2. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. E. Kloeden and E. Platen, 1992. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Applications of Mathematics (New York), Springer-Verlag, Berlin, Vol. 2.

[2] G. Milstein and M. Tretyakov, 2013. *Stochastic numerics for mathematical physics*. Springer Science & Business Media.

[3] M. Hutzenthaler, A. Jentzen and P. E. Kloeden, 2012. *Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with nonglobally Lipschitz continuous coefficients*. Ann. Appl. Probab., 22 (4), pp. 1611-1641.

[4] M. Hutzenthaler, A. Jentzen and P. E. Kloeden, 2011. *Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients*. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 467 (2130), pp. 1563-1576.

[5] S. Sabanis, 2013. *A note on tamed Euler approximations*. Electron. Commun. Probab., 18.

[6] S. Sabanis, 2016. *Euler approximations with varying coefficients: the case of superlinearly growing diffusion coefficients*. Ann. Appl. Probab., 26 (4), pp. 2083-2105.

[7] H. L. Ngo and D. T. Luong, 2017. *Strong rate of tamed Euler–Maruyama approximation for stochastic differential equations with Hölder continuous diffusion coefficients*. Braz. J. Probab. Stat., 31 (1), pp. 24-40.

[8] X. Mao, 2015. *The truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations*. J. Comput. Appl. Math., 290, pp. 370-384.

[9] M. Hefter and A. Jentzen, 2019. *On arbitrarily slow convergence rates for strong numerical approximations of Cox-Ingersoll-Ross processes and squared Bessel processes*. Finance and Stochastics., 23, pp. 139-172.

[10] I. Gyöngy and M. Rásonyi, 2011. *A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients. Stoch.* Proc. Appl., 121, pp. 2189-2200.

[11] J. Bao and C. Yuan, 2013. *Convergence rate of EM scheme for SDEs*. Proc. Amer. Math. Soc., 141 (9), pp. 3231-3243.

[12] H. L. Ngo and D. Taguchi, 2016. *On the Euler-Maruyama approximation for one-dimensional stochastic differential equations with irregular coefficients*. IMA J. Numer. Anal., 37 (4), pp. 1864-1883.

[13] H. L. Ngo and D. Taguchi, 2016. *Strong rate of convergence for the Euler–Maruyama approximation of stochastic differential equations with irregular coefficients*. Math. Comp., 85 (300), pp. 1793-1819.

[14] X. Mao, 1997. *Stochastic differential equations and their applications*. Horwood Publishing Series in Mathematics & Applications, Horwood Publishing Limited, Chichester.

[15] R. Khasminskii, 2011. *Stochastic stability of differential equations*. Springer Science & Business Media, Vol. 66.

[1] 6]SMY. Saito and T. Mitsui, 1996. *Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations*. SIAM J. Numer. Anal., 33, pp. 2254-2267.

[17] D. J. Higham, X. Mao and A. Stuart, 2003. *Exponential mean-square stability of numerical solutions to stochastic differential equations*. LMS J. Comput. Math., 6, pp. 297-313.

[18] D. J. Higham, X. Mao and C. Yuan, 2007. *Almost sure and moment exponential stability in the numerial simulation of stochastic differential equations*. SIAM J. Numer. Anal., 45, pp. 592-609.

[19] X. Mao and L. Szpruch, 2013. *Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients*. J. Comput. Appl. Math., 238 (15), pp. 14-28.

[20] D. J. Higham, 2000. *Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method*. SIAM J. Numer. Anal., 38, pp. 753-769.

[21] L. Szpruch and X. Zhang, 2015. V-Integrability, Asymptotic Stability And Comparison Theorem of Explicit Numerical Schemes for SDEs, to appear in Math. Comp., AMS.

[22] X. Zong, F. Wu and C. Huang, 2014. *Convergence and stability of the semi-tamed Euler scheme for stochastic differential equations with non-Lipschitz continuous coefficients*.

Appl. Math. Comput., 228, pp. 240-250.

[23] I. Karatzas and S. Shreve, 2012. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer Science & Business Media, 113.

[24] T. Yamada and S. Watanabe, 1971. *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*. J. Math. Kyoto Univ., 11, pp. 155-167.

[25] D. Revuz and M. Yor, 2013. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer Science & Business Media, 293.

ABSTRACT

On stable numerical approximation for non autonomous stochastic differential equations with Hölder continuous diffusion coefficient

Luong Duc Trong and Kieu Trung Thuy

Fuculty of Mathematics, Hanoi National University of Education

This paper discusses a numerical approximation for time depedent stochastic differential equation with Hölder continuous diffusion coefficient. We introduce a new approximation scheme and study its convergence in L^1-norm. An important feature of the new scheme is that it preserves the exponential stability as well as the non-negativity of the exact solution.

Keywords: Euler-Maruyama approximation.; Exponential stable; Hölder continuous; Stochastic differential equation.