SỰ PHÂN TÍCH NGUYÊN SƠ KHÔNG RÚT GỌN ĐƯỢC VÀ BAO ĐÓNG NGUYÊN CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

Trần Thị Gia Lâm*

Trường Đại học Phú Yên

Tóm tắt

Cho k là trường, $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành đa thức trên k. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả về sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được và bao đóng nguyên của iđêan đơn thức trong R.

Từ khóa: *Bao đóng nguyên, iđêan đơn thức, sự phân tích nguyên sơ.*

Abstract

The irredundant primary decomposition and integral closure of monomial ideals

Let k be a field, $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ be a polynomial ring over k. In this paper, we present some results of the irredundant primary decomposition and integral closure of monomial ideals in R.

Keywords: *Integral closure, monomial ideals, primary decomposition.*

1. Mở đầu

Cho k là trường. Theo định lý cơ sở Hilbert, vành đa thức $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành Noether. Iđêan I của R được gọi là *iđêan đơn thức* nếu nó sinh bởi tập các đơn thức. Lớp các iđêan này đóng vai trò quan trọng trong Đại số giao hoán và Hình học đại số. Sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được và việc tìm bao đóng nguyên của các iđêan đơn thức là một trong những nội dung quan trọng của Lý thuyết biểu diễn của các đường cong đơn thức, là vấn đề đang được các nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu hiện nay, như J. Herzog, A. Simis, W. V. Vasconcelos, B. Sturmfels, H. Bresisnsky, J. Stueckrad, W. Vogel, M. Morales, Ngô Việt Trung, Lê Tuấn Hoa,…

Ta đã biết, mọi iđêan I trong vành giao hoán Noether R đều có sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được (Định lí phân tích nguyên sơ trên vành giao hoán Noether). Trong bài báo này, chúng tôi xét trường hợp đặc biệt với $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ trong đó k là trường và I là iđêan đơn thức của R. Chúng tôi chỉ ra rằng khi đó các thành phần nguyên sơ trong sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được của I cũng là các iđêan đơn thức và xác định được các iđêan nguyên tố tương ứng.

Các tác giả G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B.Saint – Donat đã chỉ ra rằng bao đóng nguyên của iđêan đơn thức là iđêan đơn thức. Để xác định bao đóng nguyên của iđêan đơn thức, chúng tôi xác định tập sinh của nó thông qua bao lồi của các véctơ mũ của tập sinh của iđêan đơn thức đã cho. Đồng thời, chúng tôi chỉ ra điều kiện cần để một iđêan đơn thức cho trước là nguyên đóng.

* Email: *gialam1983@gmail.com*

Ngoài ra, ở mỗi nội dung, chúng tôi xây dựng các ví dụ minh họa cho các kết quả cũng như kĩ thuật chứng minh.

2. Các kết quả chính

2.1. Sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được của iđêan đơn thức

Các định nghĩa trong phần này có thể tìm thấy ở [2] và [3].

Định nghĩa 1. Cho R là vành giao hoán, I là iđêan nguyên sơ của $R.$ Khi đó, $P=\sqrt{I}$ là iđêan nguyên tố của R và ta nói I là P - *nguyên sơ*.

Định nghĩa 2. Giả sử R là vành giao hoán, $I, I_1, I_2, \ldots, I_r$ là các iđêan của $R.$ Sự phân tích $I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_r$ của I được gọi là *không rút gọn được* nếu

$$I \neq I_1 \cap I_2 \cap \ldots I_{i-1} \cap I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r,$$

với mọi i.

Định nghĩa 3. Cho R là vành giao hoán, I là iđêan thật sự của R. Ta nói I có sự *phân tích nguyên sơ* nếu I có thể biểu diễn thành giao hữu hạn các iđêan nguyên sơ của R, tức là tồn tại sự phân tích $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_r$ với Q_i là P_i - nguyên sơ, $i = 1, 2, \ldots, r.$

Định nghĩa 4. Cho R là vành giao hoán, I là iđêan của $R.$ Sự phân tích nguyên sơ $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_r,$ với $P_i = \sqrt{Q_i},$ $i = 1, 2, \ldots, r$ được gọi là *sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được* nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

i. $P_1, P_2, \ldots, P_r$ là các iđêan nguyên tố phân biệt của R;

ii. $I \neq Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \ldots \cap Q_r$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, r.$

Cho k là trường, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành đa thức trên k, $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ với $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$

Định nghĩa 5. Iđêan I của vành $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ được gọi là *iđêan đơn thức* nếu tồn tại $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ sao cho I sinh bởi $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}.$ Nếu I là iđêan đơn thức thì vành thương R/I được gọi là *vành đơn thức*. Một iđêan đơn thức của R được gọi là *iđêan đơn thức bất khả quy* nếu nó không thể phân tích thành giao của hai iđêan đơn thức thật sự của R chứa thật sự nó.

Theo Bổ đề Dickson, iđêan đơn thức luôn sinh bởi tập hữu hạn đơn thức.

Mệnh đề 6([4]). *Giả sử I là iđêan của $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ sinh bởi các đơn thức của r biến đầu tiên $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Nếu $I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_s$ là sự phân tích không rút gọn được của I bởi các iđêan đơn thức thì không có iđêan I_i nào với $i = 1, 2, ..., s$ chứa đơn thức thuộc $k[x_{r+1}, \ldots, x_n]$.*

Chứng minh. Đặt $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và $X' = X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}.$ Giả sử có iđêan I_i chứa đơn thức thuộc $k[X'].$ Ta phân chia các $I_1, I_2, \ldots, I_s$ thành hai nhóm: nhóm $I_1, \ldots, I_m$ gồm các I_i không chứa đơn thức nào của $k[X']$ (chú ý rằng m có thể bằng không) và nhóm $I_{m+1}, \ldots, I_s$ gồm các I_j có chứa đơn thức thuộc $k[X'].$ Với $i \geq m+1$

chọn đơn thức $g_i \in I_i$ có chứa các biến thuộc X'. Vì sự phân tích của I là không rút gọn được nên tồn tại đơn thức $f \in \bigcap_{i=1}^{m} I_i$ và $f \notin \bigcap_{i=m+1}^{s} I_i$, và nếu $m = 0$ thì ta đặt $f = 1$. Đặt $f_1 = fg_{m+1} \cdots g_s$. Vì $g_j \in I_j$ với $j \geq m+1$ nên $f_1 \in I_j$ với mọi $j \geq m+1$. Ngoài ra, $f \in \bigcap_{i=1}^{m} I_i$ nên $f_1 \in \bigcap_{i=1}^{m} I_i$. Từ đó ta có $f_1 \in I$ suy ra $f \in I$, điều này là mâu thuẫn với cách chọn f. ■

Hệ quả 7 ([4]). *Giả sử I là iđêan của $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ sinh bởi các đơn thức của r biến đầu tiên $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Nếu $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$ là sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được của I bởi các iđêan đơn thức, thì với mọi $i = 1, 2, ..., s$, $\mathfrak{q}_i$ sinh ra bởi các đơn thức thuộc $k[x_1, \ldots, x_r]$.*

Định lý 8. *Cho I là iđêan đơn thức của $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Khi đó $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$ với $\mathfrak{q}_i$ là iđêan sinh bởi lũy thừa các biến, nghĩa là $\mathfrak{q}_i = (x_{i_1}^{a_1}, x_{i_2}^{a_2}, \ldots, x_{i_{r_i}}^{a_{r_i}})$ với $i = 1, 2, \ldots, s$. Hơn nữa, sự phân tích này là duy nhất.*

Chứng minh. Đặt $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là tập sinh cực tiểu của I. Giả sử tồn tại u_i không phải là lũy thừa của các biến, chẳng hạn là u_1. Khi đó, ta có thể viết $u_1 = vw$ với v, w là các đơn thức nguyên tố cùng nhau và $v, w \neq 1$. Ta có $I = I_1 \cap I_2$ với $I_1 = (v, u_2, \ldots, u_m)$, $I_2 = (w, u_2, \ldots, u_m)$. Thật vậy, ta có $I \subset I_1 \cap I_2$. Ngược lại, lấy u là một đơn thức thuộc $I_1 \cap I_2$. Nếu u là bội của u_i nào đó thì $u \in I$. Nếu u là bội của vw, tức là bội của u_1 thì $u \in I$. Ngoài ra, vì v, w là các đơn thức nguyên tố cùng nhau nên $I \neq I_1$ và $I \neq I_2$. Nếu tập sinh cực tiểu của I_1 hoặc I_2 chứa phần tử không là lũy thừa của các biến thì ta tiếp tục như trên và sau hữu hạn bước ta được I là giao của các iđêan đơn thức sinh bởi lũy thừa của các biến. Trong giao này nếu rút bớt một thành phần bất kỳ thì ta được một iđêan chứa thật sự I cho nên sự phân tích này là không rút gọn được.

Giả sử $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}'_t$ là hai phân tích không rút gọn được với $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_j$ sinh bởi lũy thừa của các biến. Ta sẽ chứng minh với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tồn tại $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ sao cho $\mathfrak{q}'_j \subset \mathfrak{q}_i$. Thật vậy, lấy $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $\mathfrak{q}_i = (x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_\alpha^{a_\alpha})$ và giả sử $\mathfrak{q}'_j \not\subset \mathfrak{q}_i$ với mọi j. Khi đó, với mỗi j tồn tại $x_{l_j}^{b_j} \in \mathfrak{q}'_j \setminus \mathfrak{q}_i$. Điều này suy ra $l_j \notin \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ hoặc $b_j < a_{l_j}$. Đặt $u = \text{BCNN}\ \{x_{l_1}^{b_1}, x_{l_2}^{b_2}, \ldots, x_{l_t}^{b_t}\}$. Ta có $u \in \bigcap_{j=1}^{t} \mathfrak{q}'_j = I \subset \mathfrak{q}_i$. Do đó tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ sao cho $x_i^{a_i}$ là ước của u, điều này là không thể. Tương tự, với mỗi $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ tồn tại

$i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ sao cho $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_{j'}$. Vì hai sự phân tích của I ở trên là không thể rút gọn được cho nên từ đó suy ra $s = t$ và $\{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s\} = \{\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2, \ldots, \mathfrak{q}'_t\}$. ■

Định lý 9. *Cho I là iđêan đơn thức của $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Khi đó, I là bất khả quy khi và chỉ khi I sinh bởi lũy thừa các biến.*

Chứng minh. Giả sử I bất khả quy và tập sinh cực tiểu của I có đơn thức u không phải là lũy thừa các biến, khi đó $u = vw$ với $\mathrm{UCLN}(v, w) = 1$ và $v, w \neq 1$. Khi đó, theo Định lý 8, I có thể phân tích thành giao thực sự của các iđêan đơn thức, mâu thuẫn với tính bất khả quy của I.

Ngược lại, giả sử I sinh bởi lũy thừa các biến, nghĩa là $I = (x_{i_1}^{a_1}, x_{i_2}^{a_2}, \ldots, x_{i_r}^{a_r})$ và $I = I_1 \cap I_2$, với I_1, I_2 là các iđêan đơn thức thực sự chứa thật sự I. Theo Định lý 8, $I_1 = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{q}_i$, $I_2 = \bigcap_{j=1}^{t} \mathfrak{q}'_j$, trong đó $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_j$ sinh bởi lũy thừa của các biến. Như vậy, chúng ta có sự phân tích $I = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{q}_i \bigcap_{j=1}^{t} \mathfrak{q}'_j$. Sau khi loại bỏ những iđêan có thể rút gọn được trong giao ở vế phải, chúng ta nhận được một sự phân tích không rút gọn được của I bởi các iđêan đơn thức sinh bởi lũy thừa các biến. Theo Định lý 8, sự phân tích I bởi giao các iđêan sinh bởi lũy thừa các biến là duy nhất, vì I sinh bởi lũy thừa các biến và có sự phân tích trên nên $I = \mathfrak{q}_i$ hoặc $I = \mathfrak{q}'_j$ với i, j nào đó. Điều này là mâu thuẫn. Vậy I bất khả quy. ■

Ví dụ 10. Cho $R = k[x_1, x_2, x_3]$ và $I = (x_1x_2^2, x_2x_3, x_1^2x_3, x_2^3)$ là iđêan của R. Ta tìm sự phân tích không rút gọn được của I bởi các iđêan bất khả quy sinh bởi lũy thừa các biến như sau:

$$\begin{aligned}
I &= (x_1, x_2x_3, x_1^2x_3, x_2^3) \cap (x_2^2, x_2x_3, x_1^2x_3, x_2^3)\\
&= (x_1, x_2x_3, x_2^3) \cap (x_2^2, x_2x_3, x_1^2x_3)\\
&= (x_1, x_2, x_2^3) \cap (x_1, x_3, x_2^3) \cap (x_2^2, x_2, x_1^2x_3) \cap (x_2^2, x_3, x_1^2x_3)\\
&= (x_1, x_2) \cap (x_1, x_3, x_2^3) \cap (x_2, x_1^2x_3) \cap (x_2^2, x_3)\\
&= (x_1, x_2) \cap (x_1, x_3, x_2^3) \cap (x_2, x_1^2) \cap (x_2, x_3) \cap (x_2^2, x_3)\\
&= (x_1, x_2^3, x_3) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_2^2, x_3).
\end{aligned}$$

Mệnh đề 11. *Cho $\mathfrak{q} = (x_{i_1}^{a_1}, x_{i_2}^{a_2}, \ldots, x_{i_r}^{a_r}) \subset R$ là iđêan đơn thức bất khả quy và $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$. Khi đó $\mathfrak{q}$ là $\mathfrak{p}$ - nguyên sơ.*

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}\}$ là tập các phần tử sinh của $\sqrt{\mathfrak{q}}$. Rõ ràng, $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}\} \subset \sqrt{\mathfrak{q}}$. Ngược lại, do $\mathfrak{q}$ là iđêan đơn thức nên $\sqrt{\mathfrak{q}}$ cũng là iđêan đơn thức. Giả sử u là một đơn thức nào đó thuộc $\sqrt{\mathfrak{q}}$. Khi đó, tồn tại số nguyên không âm m để $u^m \in \mathfrak{q}$, tức là $u^m = vw$ với $v \in \left\{x_{i_1}^{a_1}, x_{i_2}^{a_2}, \ldots, x_{i_r}^{a_r}\right\}$, điều này kéo theo $v = x_{i_j}^{a_j}$ với j nào đó, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Do đó x_{i_j} phải có mặt trong thành phần của đơn thức u, nghĩa là $u \in (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$. Từ kết quả này suy ra $\sqrt{\mathfrak{q}} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$. Do $\mathfrak{q}$ là bất khả quy sinh bởi lũy thừa các biến nên $\mathfrak{q}$ là nguyên sơ, do đó, $p = \sqrt{\mathfrak{q}}$ là nguyên tố, từ đó suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Trong vành Noether, mọi iđêan đều có sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được. Bởi Định lý 8, mỗi iđêan đơn thức đều có sự phân tích duy nhất thành giao các iđêan sinh bởi lũy thừa các biến và sự phân tích đó là không rút gọn được. Theo Định 9, mỗi thành phần của sự phân tích này là bất khả quy, do đó, bởi Mệnh đề 11, mỗi thành phần của sự phân tích này là p_i - nguyên sơ, cho nên đó cũng là sự phân tích nguyên sơ của iđêan đơn thức. Tuy nhiên, sự phân tích nguyên sơ này là có thể không phải là không rút gọn được và ta có thể tìm được dạng phân tích nguyên sơ không rút gọn được của nó (khi đó các thành phần trong sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được này có thể không thỏa mãn điều kiện sinh bởi lũy thừa của các biến). Vì giao của các iđêan p - nguyên sơ là iđêan p - nguyên sơ nên trong sự phân tích $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$ theo Định lý 9, chúng ta thay thế tất cả các $\mathfrak{q}_j$ cùng là p_i - nguyên sơ bởi giao của chúng, ta sẽ được dạng phân tích nguyên sơ không rút gọn được của I. Ví dụ sau minh họa điều này.

Ví dụ 12. Cho $R = k[x_1, x_2, x_3]$ và $I = (x_1^2, x_2^2x_3, x_3^2, x_1x_2)$ là iđêan của R có sự phân tích không rút gọn được bởi các iđêan bất khả quy sinh bởi lũy thừa các biến:

$$I = (x_1, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2, x_3) \cap (x_1, x_3).$$

Theo mệnh đề 11, các iđêan $(x_1, x_2^2, x_3^2), (x_1^2, x_2, x_3^2), (x_1^2, x_2, x_3)$ là (x_1, x_2, x_3) - nguyên sơ và iđêan (x_1, x_3) là (x_1, x_3) - nguyên sơ. Vì

$$(x_1, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2)$$

nên I có sự phân tích nguyên sơ không rút gọn được sau đây:

$$I = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2) \cap (x_1, x_3).$$

2.2. Bao đóng nguyên của iđêan đơn thức

Trước hết ta nhắc lại khái niệm bao đóng nguyên của iđêan.

Định nghĩa 13. Cho R là vành và I là iđêan của R. Phần tử $f \in R$ được gọi là *nguyên trên* I nếu nó thỏa mãn phương trình

$$f^m + c_1 f^{m-1} + \ldots + c_{m-1} f + c_m = 0, \text{ với } c_i \in I^i, i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Phương trình này được gọi là *phương trình phụ thuộc nguyên* của f trên I.

Tập hợp $\bar{I} \subset R$ gồm tất cả các phần tử nguyên trên I được gọi là *bao đóng nguyên* của I. Iđêan I gọi là *nguyên đóng* nếu $\bar{I} = I$. Ta nói I là iđêan *chuẩn* nếu mọi lũy thừa của I là nguyên đóng.

Bổ đề 14 ([4]). *Cho* $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *là vành đa thức trên trường* k *và* I *là iđêan của* R. *Giả sử* $M_1, M_2, \ldots, M_q$ *là tập các đơn thức độc lập tuyến tính trên* k *thỏa mãn*

$$M_j^{s_j} = b_{m_j} \prod_{i \neq j} M_i^{r_{ji}} \notin k,$$

trong đó, $s_j = m_j + \sum_{i \neq j} r_{ji} > 0,\ m_j$ và $r_{ji} \in \mathbb{N}$ *với mọi* $j = 1, 2, \ldots, q.$ *Nếu* b_{m_j} *là đơn thức trong* I^{m_j} *với* $m_j > 0$ *và* $b_{m_j} \in k$ *thì* $M_q^l \in I^l$ *với* $l > 0$ *nào đó.*

Chứng minh: Ta chứng minh bằng quy nạp theo q.

Trường hợp $q = 1$, dễ thấy Bổ đề đúng. Giả sử $q \geq 2$. Với mỗi $j \geq 2$, thay $M_1^{s_1}$ vào $M_j^{s_j s_1}$ ta được $M_j^{s_j s_1 - r_{1j} r_{j1}} = b_{m_j}^{s_1} b_{m_1}^{r_{j1}} \prod_{1 \neq i \neq j} M_i^{s_1 r_{ji} + r_{1i} r_{j1}}$. Chú ý rằng trong các phương trình này M_1 đã bị loại. Do đó, áp dụng giả thiết quy nạp cho $M_2, \ldots, M_q$ chúng ta có $M_q^l \in I^l$ với $l > 0$ nào đó. ■

Mệnh đề 15 ([4]). *Cho* R *là vành đa thức trên trường* k *và* I *là iđêan đơn thức của* R. *Khi đó, bao đóng nguyên* $\bar{I}$ *của* I *cũng là iđêan đơn thức.*

Chứng minh. Lấy $z = M_1 + M_2 + \ldots + M_q \in \bar{I}$, trong đó các M_i là các đơn thức độc lập tuyến tính trên k. Do z nguyên trên I nên tồn tại phương trình phụ thuộc nguyên của z trên I

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, \text{ với } a_i \in I^i, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bằng quy nạp, ta chỉ cần chứng minh $M_i \in \bar{I}$ với i nào đó. Nếu $M_i^n \in I^n$ thì $M_i \in \bar{I}$. Do đó, ta có thể giả sử $M_i^n \notin I^n$ với mọi i. Vì I^i là iđêan đơn thức, cho nên mọi đơn thức có mặt trong a_i đều thuộc I^i. Từ phương trình trên, sau khi khử các hạng tử chung ta nhận được các phương trình $M_j^{s_j} = b_{m_j} \prod_{i \neq j} M_i^{r_{ji}}$, trong đó, $s_j = m_j + \sum_{i \neq j} r_{ji},\ m_j, r_{ji} \in \mathbb{N}$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, q$ sao cho b_{m_j} là đơn thức trong I^{m_j} với $m_j > 0$, và $b_{m_j} \in k$ với $m_j = 0$.

Theo Bổ đề 14, ta được $M_q \in \bar{I}$. ■

Mệnh đề 16. *Cho* R *là vành đa thức trên trường* k *và* I *là iđêan đơn thức của* R. *Khi đó, bao đóng nguyên của* I *là*

$$\bar{I} = \left(\left\{ x^\alpha \mid x^{m\alpha} \in I^m, \text{ với } m \geq 1 \text{ nào đó} \right\} \right).$$

Chứng minh. Nếu $x^{m\alpha} \in I^m$ thì x^α là nghiệm của đa thức $z^m + a_m$, với

$a_m \in I^m$, do đó $x^\alpha \in \bar{I}$. Để có điều ngược lại, trước hết ta chứng minh nếu J là iđêan đơn thức và $u \in \bar{J}$ là đơn thức bất kỳ thì tồn tại số nguyên dương r sao cho $u^r \in J^r$. Thật vậy, vì $u \in \bar{J}$ nên gọi phương trình phụ thuộc nguyên của u trên J là $u^m + c_1 u^{m-1} + \ldots + c_m = 0$ với $c_i \in J^i$. Gọi $a_i \in k$ là hệ số của u^i trong đa thức c_i. Khi đó ta có $(1 + a_1 + \ldots + a_m)u^m = 0$. Suy ra tồn tại $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ sao cho $a_r \neq 0$. Như vậy, u^r có mặt trong đa thức c_r. Vì $c_r \in J^r$ và J^r là iđêan đơn thức nên $u^r \in J^r$.

Bây giờ, lấy $z = x^\alpha \in \bar{I}$. Theo chứng minh trên, tồn tại số nguyên dương m để $z^m \in I^m$, suy ra $z \in \left(\left\{x^\alpha \mid x^{m\alpha} \in I^m, \text{ với } m \geq 1 \text{ nào đó}\right\}\right)$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Sau đây ta tìm biểu diễn hình học của bao đóng nguyên của iđêan đơn thức. Cho $\alpha \in \mathbb{Q}_+^n$, trong đó $\mathbb{Q}_+$ là tập các số hữu tỷ không âm. Ta gọi *góc trên bên phải* của α là vectơ $\lceil \alpha \rceil$ mà các thành phần $\lceil \alpha \rceil_i$ xác định bởi

$$\lceil \alpha \rceil_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{nếu } \alpha_i \in \mathbb{N}, \\ [\alpha_i] + 1 & \text{nếu } \alpha_i \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó $[\alpha_i]$ là phần nguyên của α_i.

Giả sử $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{N}^n$, ta gọi $\operatorname{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ là *bao lồi* của $a_1, a_2, \ldots, a_r$ (trên tập hữu tỷ), xác định bởi

$$\operatorname{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \mid \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{Q}_+ \text{ với mọi } i \right\}$$

là tập mọi tổ hợp lồi của $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Mệnh đề 17 ([1]). *Cho $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành đa thức trên trường k. Nếu iđêan I của R sinh bởi các đơn thức $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_r}$ thì bao đóng nguyên của I là*

$$\bar{I} = \left(\left\{x^{\lceil \alpha \rceil} \mid \alpha \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_r)\right\}\right).$$

Chứng minh. Đặt $F = \left\{x^{\lceil \alpha \rceil} \mid \alpha \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_r)\right\}$. Lấy $x^{\lceil \alpha \rceil} \in F$ và giả sử $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$ là một tổ hợp lồi của $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Vì $\lceil \alpha \rceil \geq \alpha$ nên tồn tại $\beta \geq 0, \beta \in \mathbb{Q}^n$ để $\lceil \alpha \rceil = \alpha + \beta$. Do đó, tồn tại $p > 0$ sao cho $p\beta \in \mathbb{N}^n$ và $p\lambda_i \in \mathbb{N}$ với mọi i. Vì thế,

$$x^{p\lceil \alpha \rceil} = x^{p\beta} x^{p\alpha} = x^{p\beta} (x^{a_1})^{p\lambda_1} (x^{a_2})^{p\lambda_2} \ldots (x^{a_r})^{p\lambda_r} \in I^p,$$

kéo theo $x^{\lceil \alpha \rceil} \in \bar{I}$ và $(F) \subset \bar{I}$. Ngược lại, lấy $x^\gamma \in \bar{I}$, nghĩa là $x^{p\gamma} \in I^p$ với $p > 0$ nào đó. Tồn tại các số nguyên không âm s_i thỏa mãn $x^{p\gamma} = x^{\delta}(x^{a_1})^{s_1}(x^{a_2})^{s_2}\ldots(x^{a_r})^{s_r}$ và $s_1 + s_2 + \ldots + s_r = p.$ Do đó $\gamma = \frac{\delta}{p} + \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{s_i}{p}\right)a_i$. Đặt $\alpha = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{s_i}{p}\right)a_i$. Chia các thành phần của δ cho p, ta có thể viết $\gamma = \theta + \alpha + \beta,$ trong đó $0 \le \beta_i < 1$ với mọi i và $\theta \in \mathbb{N}^n$. Chú ý rằng, $\alpha + \beta \in \mathbb{N}^n$. Cuối cùng, ta cần chứng tỏ $\lceil \alpha \rceil = \alpha + \beta.$ Nếu $\beta_i = 0$ thì $\alpha_i \in \mathbb{N}$ và $\lceil \alpha \rceil_i = \alpha_i + \beta_i$. Giả sử $0 < \beta_i < 1,$ vì $\alpha_i + \beta_i \in \mathbb{N}$ nên $\alpha_i \notin \mathbb{N}$ và $\lceil \alpha \rceil_i = [\alpha_i] + 1.$ Nếu $[\alpha_i] + 1 < \alpha_i + \beta_i < \alpha_i + 1$ thì $[\alpha_i] + 1 < [\alpha_i + \beta_i] = \alpha_i + \beta_i \le [\alpha_i] + 1,$ điều này là mâu thuẫn, do đó, $\alpha_i < \alpha_i + \beta_i \le [\alpha_i] + 1$ suy ra $\alpha_i + \beta_i = [\alpha_i] + 1$ hay $\lceil \alpha \rceil_i = \alpha_i + \beta_i.$ Kết quả là $x^{\gamma} \in (F),$ do đó ta có điều cần chứng minh. ■

Hệ quả 18. *Cho $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành đa thức trên trường k và I là iđêan sinh bởi các đơn thức $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_r}$. Khi đó, bao đóng nguyên $\bar{I}$ sinh bởi các đơn thức có bậc không quá $d + n - 1,$ trong đó d số lớn nhất trong các bậc của các đơn thức $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_r}$.*

Chứng minh. Lấy $\alpha \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ và $\beta = \lceil \alpha \rceil.$ Theo Mệnh đề 17, x^{β} là phần tử sinh của $\bar{I}$. Ta cần chứng minh $\deg x^{\beta} \le d + n - 1$ hay $\sum_{i=1}^{n}\beta_i \le d + n - 1.$ Vì $\beta_i = \alpha_i + \delta_i$ với $\delta_i \in [0,1)$ nên $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\delta_i \le d + n - 1.$ ■

Ví dụ 19. Cho $I = \left(x^4, xy^2, y^3\right) \subset k[x, y].$ Ta có

$$\begin{aligned}&\{\lceil \alpha \rceil \mid \alpha \in \operatorname{conv}((0,3),(1,2),(4,0))\}\\ &= \{(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1)\}.\end{aligned}$$

Do vậy, bao đóng nguyên của I là

$$\bar{I} = \left(y^3, xy^2, xy^3, x^2y^2, x^2y^3, x^3y, x^3y^2, x^4, x^4y\right) = \left(x^4, y^3, xy^2, x^3y\right).$$

Mệnh đề 20. *Cho k là trường và $R = k[x_1, x_2]$. Nếu I là iđêan sinh bởi các đơn thức $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_q}$ có bậc d thì I cũng sinh ra bởi các đơn thức có bậc d.*

Chứng minh. Ký hiệu $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$ và giả sử $a_{11} < a_{21} < \ldots < a_{q1}$. Ta chứng minh $\bar{I}$ sinh ra bởi tập A gồm các đơn thức có dạng $x^c = x_1^{c_1}x_2^{c_2}$ thỏa mãn $c_1 + c_2 = d$ và $a_{11} \le c_1 \le a_{q1}$. Thật vậy, nếu $x^c \in A$ thì $c_1 = ta_{11} + (1-t)a_{q1}$ với $0 \le t \le 1.$ Do đó,

$c = ta_1 + (1-t)a_q$ và $c \in \operatorname{conv}(a_1, a_2),$ điều này có nghĩa là $x^c \in \bar{I}$. Ngược lại, lấy x^β là một phần tử sinh của $\bar{I}$. Theo mệnh đề 17, $\beta = \lceil \alpha \rceil$ với $\alpha \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_q).$ Đặt $c = (\lceil \alpha \rceil_1, d - \lceil \alpha \rceil_1).$ Ta chứng minh $x^c \in A$, tức là chứng minh $a_{11} \le \lceil \alpha \rceil_1 \le a_{q1}$. Vì $\alpha \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ nên $\alpha = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_q a_q, \sum_{i=1}^{q} t_i = 1, t_i \ge 0$ với mọi i kéo theo $\alpha_1 = t_1 a_{11} + t_2 a_{21} + \ldots + t_q a_{q1}.$ Vì $a_{11} < a_{21} < \ldots < a_{q1}$ và $\sum_{i=1}^{q} t_i = 1$ nên $a_{11} < \alpha_1 < a_{q1}$ suy ra $a_{11} \le \lceil \alpha \rceil_1 \le a_{q1}.$ Cuối cùng ta chứng minh $\beta \ge c.$ Thật vậy, $\alpha_2 = t_1 a_{12} + t_2 a_{22} + \ldots + t_q a_{q2}$. Do đó,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = t_1(a_{11} + a_{12}) + t_2(a_{21} + a_{22}) + \ldots + t_q(a_{q1} + a_{q2}) = d.$$

Vì vậy, $\lceil \alpha \rceil_1 + \lceil \alpha \rceil_2 \ge \lceil \alpha_1 + \alpha_2 \rceil = d$. Suy ra $\lceil \alpha \rceil_2 \ge d - \lceil \alpha \rceil_1.$ Vậy $\beta \ge c.$ ■

Mệnh đề 21 ([2]). *Giả sử $R = k[x_1, x_2]$ và I là iđêan của R sinh bởi các đơn thức có cùng bậc d. Nếu I là nguyên đóng thì I là chuẩn.*

Chứng minh. Iđêan I có dạng zJ với z là ước chung lớn nhất của các đơn thức trong I . Do I là nguyên đóng khi và chỉ khi J là nguyên đóng nên có thể giả sử I là m-nguyên sơ, trong đó, $m = (x_1, x_2)$. Vì $x_1^d, x_2^d \in I$ nên suy ra $I = m.$ ■

Định nghĩa 22. Cho x^a là đơn thức của $R = k[x]$ và đặt $\log(x^a) = a.$ Cho tập F gồm hữu hạn đơn thức, ta định nghĩa $\log(F) := \{\log(x^a) \mid x^a \in F\}.$

Mệnh đề 23 ([4]). *Cho $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành đa thức trên trường k và I là iđêan đơn thức của $R.$ Khi đó, bao đóng nguyên của I được cho bởi:*

$$\bar{I} = \left(\left\{x^\alpha \mid \alpha \in \operatorname{conv}(\log(I)) \cap \mathbb{Z}^n\right\}\right).$$

Chứng minh. Đặt $J = \left(\left\{x^\alpha \mid \alpha \in \operatorname{conv}(\log(I)) \cap \mathbb{Z}^n\right\}\right).$ Giả sử $\alpha \in \operatorname{conv}(\log(I))$. Ta có thể viết $\alpha = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \beta_i,$ trong đó, $\mu_i \ge 0, \sum_{i=1}^{q} \mu_i = 1$ và $x^{\beta_i} \in I.$ Chú ý rằng $A\mu^t = (1, \alpha)^t,$ trong đó A là ma trận cấp $(n+1) \times q$ với các cột là $(1, \beta_i)^t, i = 1, 2, \ldots, q,$ vì thế, bởi Bổ đề Farkas chúng ta có thể giả sử $\mu_i \in \mathbb{Q}.$ Chọn $m \in \mathbb{N}_+$ sao cho $m\mu_i \in \mathbb{N}$ với mọi $i,$ chúng ta nhận được $x^{m\alpha} \in I^m$ và $x^\alpha \in \bar{I}$. Ngược lại, ta cần chứng minh $\bar{I} \subset J.$ Vì $\bar{I}$ sinh bởi các đơn thức nên với $x^\alpha \in \bar{I},$ tồn tại $m \in \mathbb{N}_+$ sao cho $x^{m\alpha} \in I^m.$ Điều này kéo theo $\alpha \in \operatorname{conv}(\log(I)).$ ■

Mệnh đề 24. *Giả sử* F *là tập hữu hạn các đơn thức bậc* d *của vành đa thức* $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *trên trường* k. *Nếu* $I = (F)$ *là nguyên đóng, thì* $\mathrm{conv}(\log(F)) \cap \mathbb{Z}^n = \log(F)$.

Chứng minh. Đặt $F = \{x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_q}\}$. Lấy $\beta \in \mathrm{conv}(\log(F)) \cap \mathbb{Z}^n$ thì $\beta = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \alpha_i$, trong đó, $\mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{q} \mu_i = 1$. Vì F là tập hữu hạn các đơn thức bậc d nên $|\beta| = d$. Mặt khác $\beta \in \mathbb{Z}^n$ nên $x^{\beta} = x^{\lceil \beta \rceil}$ là phần tử sinh của $\bar{I} = I$ cho nên $x^{\beta} = x^{\alpha_i}$ với i nào đó và do đó $\beta \in \log(F)$. Bao hàm thức ngược lại là hiển nhiên. ■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Brondsted (1983), *Introduction to Convex Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics 90, Springer - Verlag.

[2] J. Herzog and T. Hibi (2011), *Monomial Ideals*, Springer - Verlag London Limited.

[3] R. Y. Sharp (2000), *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press.

[4] R. H. Villarreal (2006), *Monomial Algebras*, INC.

(Ngày nhận bài: 09/10/2018; ngày phản biện: 26/11/2018; ngày nhận đăng: 04/01/2019)