MỘT LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TOEPLITZ-HANKEL LIÊN QUAN ĐẾN BIẾN ĐỔI KONTOROVICK–LEBEDEV VÀ FOURIER

Trịnh Tuân*

Trường Đại học Điện lực

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xem xét giải đúng một lớp hệ phương trình tích phân dạng Toeplitz-Hankel với hạch không thoái hoá bằng kỹ thuật tích chập và tích chập suy rộng liên quan đến các phép biến đổi tích phân Kontorovich–Lebedev và Fourier trên các lớp không gian hàm $L_p^{\alpha,\beta}$.

Từ khóa: *Biến đổi Kontorovich-Lebedev, Fourier, Phương trình Toeplitz-Hankel.*

Abstract

Systems of integral equations of Toeplitz plus Hankel kernel related to the Kontorovich-Lebedev and Fourier transforms

In this paper, we investigate several systems of integral equations with the Toeplitz plus Hankel kernel which can be solved in closed form in certain function space $L_p^{\alpha,\beta}$ *with the help of the generalized convolution for the Kontorovich-Lebedev, Fourier sine, and the Fourier cosine transforms.*

Keywords: *Kontorovich-Lebedev transform, Fourier transform, Toeplitz plus Hankel integral equation.*

1. Đặt vấn đề

Phương trình tích phân với nhân Toeplitz-Hankel là một trường hợp riêng của phương trình tích phân Fredholm có dạng sau:

$$f(\mathrm{t}) + \int_0^T \mathrm{K}(\mathrm{t},\mathrm{s}) f(\mathrm{s})\mathrm{ds} = \mathrm{g}(\mathrm{t}), \quad \mathrm{t} > 0, \mathrm{s} \leq \mathrm{T}. \tag{1.1}$$

Trong đó: $K(t, s) = K_1(t-s) + K_2(t+s)$, K_1 là nhân Toeplitz và K_2 là nhân Hankel, g là hàm cho trước và f là ẩn hàm phải tìm. Phương trình (1.1) được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Krein, Kagiwada, Kalaba Tsitsiklis (Xem [4, 13, 1]) và cho nhiều ứng dụng khác nhau trong lý thuyết tán xạ, hệ động lực chất lỏng, lý thuyết lọc tuyến tính ... (Xem [4, 1]), hầu hết việc nghiên cứu phương trình (1.1) mới dừng lại ở việc tìm nghiệm xấp xỉ hoặc tìm nghiệm đúng trong trường hợp nhân có tính đối xứng, suy biến. Trong những năm gần đây đã có một số kết quả nghiên cứu giải đúng một số lớp phương trình (1.1) trên $(0,+\infty)$ bằng kĩ thuật tích chập và tích chập suy rộng (Xem [3], [5], [6], [12], [14], [15], [16]). Tuy nhiên, cho đến nay việc giải phương trình Toeplitz-Hankel (1.1) với nhân K_1, K_2 tổng quát còn là bài toán mở.

Trong bài báo này, sử dụng các kĩ thuật trong [10], [11], [2], [9], [8] bằng cách chọn lớp nhân, chúng tôi xem xét giải một lớp hệ phương trình tích phân dạng (3.1) bằng kỹ thuật tích chập suy rộng với hàm trọng γ(y) liên quan đến các phép biến đổi tích phân

* Email: *tuantrinhpsac@yahoo.com*

Kontorovich-Lebedev, Fourier sine và Fourier cosine trên không gian hàm $L_1^{\alpha,1}$. Kết quả chính nhận được cho ta công thức nghiệm tường minh cũng như chỉ ra không gian nghiệm tồn tại.

2. Các phép biến đổi và không gian hàm liên quan

Trong phần này chúng tôi trích dẫn một số phép biến đổi tích phân và không gian hàm dùng để nghiên cứu.

Phép biến đổi tích phân Fourier cosine (F_c) và phép biến đổi ngược (xem [7])

$$(F_c f)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy)\, dx, \qquad y > 0, \tag{2.1}$$

và

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} (F_c f)(y) \cos(xy)\, dy, \qquad x > 0. \tag{2.2}$$

Phép biến đổi tích phân Fourier sine (F_s) và phép biến đổi ngược (xem [7])

$$(F_s f)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(xy)\, dx, \qquad y > 0, \tag{2.3}$$

và

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} (F_s f)(y) \sin(xy)\, dy, \qquad x > 0. \tag{2.4}$$

Phép biến đổi tích phân Kontorovich-Lebedev (K) (xem [8])

$$K_{ix}[f] = \int_0^{+\infty} K_{ix}(t) f(t) dt, \qquad x > 0, \tag{2.5}$$

trong đó $K_{ix}(t)$ là hàm Macdonald (xem [8])

$$K_{ix}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\cosh u} \cos(xu)\, du, \qquad x \geq 0, t > 0.$$

Phép biến đổi ngược Kontorovich-Lebedev (K^{-1})

$$(K^{-1} f)(x) = \frac{2}{\pi^2} x sinh(\pi x) \int_0^{+\infty} K_{ix}(y) y^{-1} f(y) dy, \quad x > 0. \tag{2.6}$$

Không gian hàm (xem [7])

$$L_1(\mathbb{R}_+, \gamma) \equiv \left\{ f : \int_{R_+} \gamma |f| < \infty \right\} \tag{2.7}$$

Như vậy $\quad L_1(\mathbb{R}_+) \subset L_1(\mathbb{R}_+, \gamma)$.

Không gian hàm (xem [9])

$$L_p^{\alpha,\beta} \equiv L_p(\mathbb{R}_+, K_0(\beta t) t^\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \beta \leq 1. \tag{2.8}$$

với chuẩn là:

$$\|f\|_{L_p^{\alpha,\beta}} = \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p K_0(\beta t) t^\alpha dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Nhận xét: $L_p(\mathbb{R}_+) \subset L_p^{\alpha,\beta}$, $L_1^{\alpha,1} \equiv L_1(\mathbb{R}_+, \mathrm{K}_0(\mathrm{t})\mathrm{t}^\alpha)$.

3. Một lớp hệ phương trình Toeplitz-Hankel

Phần này chúng tôi đi xem xét giải đúng một lớp phương trình tích phân dạng Toeplitz-Hankel với nhân không thoái hóa và không kỳ dị bằng kỹ thuật của tích chập với hàm trọng γ liên quan đến các phép biến đổi tích phân Kontorovick–Lebedev, Fourier sine và Fourier cosine.

Xét bài toán có dạng:

$$\begin{cases} f(x) + \int_0^{+\infty} K_1(x,\tau) g(\tau) d\tau = q_1(x) \\ \int_0^{+\infty} K_2(x,\tau) f(\tau) d\tau + g(x) = q_2(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Trong đó K_1, K_2 là nhân, $q_{1,2}(x)$ là hàm cho trước, $f(x)$, $g(x)$ là ẩn hàm.

Trước hết chúng tôi giới thiệu các tích chập và các tích chập suy rộng đã biết sau đây :

Tích chập suy rộng với hàm trọng $\gamma_1(y)$ đối với hai phép biến đổi tích phân Kontorovich–Lebedev và Fourier sin (xem [10])

$$\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{1}{*}} h\right)(x) := \int_{R_+^2} \frac{1}{2\pi x}\left[e^{-x\cosh(\tau+\theta)} - e^{-x\cosh(\tau-\theta)}\right] f(\tau) h(\theta) d\tau d\theta, \quad x > 0. \quad (3.2)$$

Trong đó: $\gamma_1(y) = \frac{1}{y\sinh(\pi y)}$, nếu $f, h \in L_1(\mathbb{R}_+)$ thì $\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{1}{*}} h\right) \in L_1^{\alpha,1}$ và ta có đẳng thức nhân tử hóa sau:

$$K\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{1}{*}} h\right)(y) = \frac{\pi}{2}\gamma_1(y)(F_s f)(y)(F_s h)(y), \quad \forall y > 0. \quad (3.3)$$

Tích chập suy rộng với hai phép biến đổi tích phân Fourier sine, Kontorovich–Lebedev (xem [11])

$$\left(f \underset{2}{*} h\right)(x) := \int_{{}^2_+} \frac{1}{\tau}\left[e^{-\tau\cosh(\tau+\theta)} - e^{-\tau\cosh(\tau-\theta)}\right] f(\tau) h(\theta) d\tau d\theta, \quad x > 0 \quad . \quad (3.4)$$

Trong đó: $f \in L_1\left(\mathbb{R}_+, \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$, $g \in L_1(\mathbb{R}_+)$ thì $\left(f \underset{2}{*} h\right) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ và cho ta đẳng thức nhân tử hóa sau:

$$F_s\left(f \underset{2}{*} h\right)(y) = (Kf)(y)(F_s g)(y), \quad \forall y > 0. \quad (3.5)$$

Tích chập suy rộng với hàm trọng $\gamma_2(y)$ đối với phép biến đổi tích phân Fourier sine (xem [2])

$$\left(f \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} h\right)(x) := \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(y)[sign(\mathrm{x}+\mathrm{y}-1)\mathrm{h}(|\mathrm{x}+\mathrm{y}-1|) - \mathrm{h}(\mathrm{x}+\mathrm{y}+1)$$
$$+ \mathrm{sign}(\mathrm{x}-\mathrm{y}+1)\mathrm{h}(|\mathrm{x}-\mathrm{y}+1|)$$
$$- \mathrm{sign}(\mathrm{x}-\mathrm{y}-1)\mathrm{h}(|\mathrm{x}-\mathrm{y}-1|)]\mathrm{dy}, \forall \mathrm{x}$$
$$> 0, \quad (3.6)$$

Trong đó $\gamma_2(y) = siny$, nếu $f, h \in L_1(\mathbb{R}_+)$ thì tích chập $\left(f \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} h\right) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ và có đẳng thức nhân tử hóa sau:

$$F_s\left(f \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} h\right)(y) := siny(F_s f)(y)(F_s h)(y), \quad \forall y > 0. \tag{3.7}$$

Để giải hệ (3.1) ta chọn nhân như sau:

$$K_1(x,\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi x}\left[e^{-xcosh(\tau+\theta)} - e^{-xcosh(\tau-\theta)}\right]\varphi(\theta)d\theta, \quad \forall x, \tau > 0 \ ,$$

$$K_2(x,\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau}\left[e^{-\tau cosh(x-\theta)} - e^{-\tau cosh(x+\theta)}\right]\psi(\theta)d\theta, \quad \forall x, \tau > 0 \ .$$

Khi đó hệ (3.1) trở thành:

$$\begin{cases} f(x) + \left(g \overset{\gamma_1}{\underset{1}{*}} \varphi\right)(x) = q_1(x), & \forall x > 0 \\ \left(f \underset{2}{*} \psi\right)(x) + g(x) = q_2(x), & \forall x > 0\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

Trong đó: $\gamma_1(y) = \frac{1}{y\,sinh(\pi g)}$, $q_{1,2}, \varphi, \psi$ là các hàm cho trước và φ, ψ, $q_2 \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $q_1 \in L_1^{\alpha,1}, \propto \in \mathbb{R}$. Tác động vào các phương trình của hệ (3.8) theo thứ tự bởi các phép biến đổi (K),(F_s) và sử dụng các đẳng thức nhân tử hóa (3.3), (3.5) (3.7) ta được:

$$\begin{cases} (Kf)(y) + \left(g \overset{\gamma_1}{\underset{1}{*}} \varphi\right)(y) = (Kq_1)(y), & \forall y > 0 \\ F_s\left(f \underset{2}{*} \psi\right)(y) + (F_s g)(y) = (F_s q_2)(y), & \forall y > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Kf)(y) + \dfrac{\pi}{2ysinh(\pi g)}(F_s g)(y)(F_s\varphi)(y) = (Kq_1)(y), & \forall y > 0, \\ (Kf)(y)(F_s\psi)(y) + (F_s g)(y) \quad = (F_s q_2)(y), & \forall y > 0, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\pi}{2ysinh(\pi y)}(F_s\varphi)(y) \\ (F_s\psi)(y) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{\pi}{2ysinh(\pi y)}(F_s\varphi)(y)(F_s\psi)(y)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2ysinh(\pi y)}\frac{1}{siny}F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} \psi\right)(y), \quad \forall y > 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (Kq_1)(y) & \dfrac{\pi}{2ysinh(\pi y)}(F_s\varphi)(y) \\ (F_s q_2)(y) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (Kq_1)(y) - \frac{\pi}{2ysinh(\pi y)}\frac{1}{siny}F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} q_2\right)(y), \quad \forall y > 0\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & (Kq_1)(y) \\ (F_s\psi)(y) & (F_sq_2)(y) \end{vmatrix} = (F_sq_2)(y) - F_s\left(q_1 \underset{2}{*} \psi\right)(y), \quad \forall y > 0\,.$$

$Giả\ sử:\ 1 - \dfrac{\pi}{2ysinh(\pi y)}\dfrac{1}{siny}F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} \psi\right)(y) \neq 0, \forall y > 0.$

Khi đó

$$(Kf)(y) = \frac{2ysinh(\pi y)siny(Kq_1)(y) - \pi F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} q_2\right)(y)}{2ysinh(\pi y)siny - \pi F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} \psi\right)(y)}, \qquad \forall y > 0.$$

Tác động phép biến đổi ngược K^{-1} ta được :

$$f = K^{-1}\left(\frac{2ysinh(\pi y)siny(Kq_1)(y) - \pi F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} q_2\right)(y)}{2ysinh(\pi y)siny - \pi F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} \psi\right)(y)}\right), \tag{3.9}$$

$$\forall y > 0,$$

$$(F_Sg)(y) = \frac{2ysinh(\pi y)siny.\left[(F_sq_2)(y) - F_s\left(q_1 \underset{2}{*} \psi\right)(y)\right]}{2ysinh(\pi y)siny - \pi F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} \psi\right)(y)}, \quad \forall y > 0$$

do đó

$$g = {F_s}^{-1}\left(\frac{2ysinh(\pi y)siny\left[(F_sq_2)(y) - F_s\left(q_1 \underset{2}{*} \psi\right)(y)\right]}{2ysinh(\pi y)siny - \pi F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} \psi\right)(y)}\right), \forall y > 0, \tag{3.10}$$

Định lý 3.1.

Giả sử : $1 - \frac{\pi}{2ysinh(\pi y)}\frac{1}{siny}F_s\left(\varphi \overset{\gamma_2}{\underset{F_s}{*}} \psi\right)(y) \neq 0, \forall y > 0.$ *Khi đó bài toán (3.1) cho ta nghiệm dạng (3.9), (3.10) và nghiệm* $f \in L_1(\mathbb{R}_+) \cap L_1^{\alpha,1}$, $g \in L_1(\mathbb{R}_+), \alpha \in \mathbb{R}$.

Để nghiên cứu tiếp theo chúng tôi tiếp tục đề cập đến các tích chập sau đây :

Tích chập suy rộng với hàm trọng $\gamma_1(y)$ đối với hai phép biến đổi tích phân Kontorovich–Lebedev, Fourier cosine (xem [9])

$$\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} h\right)(x) := \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{\pi x}K_0\left(\sqrt{x^2 + \theta^2 + 2x\theta cosh\tau}\right)f(\tau)h(\theta)d\tau d\theta, \quad \forall x > 0. \tag{3.11}$$

Trong đó $\gamma_1(y) = \frac{1}{ysinh(\pi y)}$ nếu $f \in L_1(\mathbb{R}_+), h \in L_1^{0,1}$ thì tích chập $\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} h\right) \in L_1^{\alpha,1}$ và có đẳng thức nhân tử hóa:

$$\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} h\right)(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\gamma_1(y)(F_2 f)(y)(Kh)(y), \quad \forall y > 0. \tag{3.12}$$

Tích chập đối với phép biến đổi tích phân Kontorovich–Lebedev xác định như sau (xem [8])

$$\left(f \underset{4}{*} h\right)(x) := \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{2x} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau\theta}{x} + \frac{\tau x}{\theta} + \frac{\theta x}{\tau}\right)\right] f(\tau)h(\theta)d\tau d\theta, \quad \forall x > 0. \tag{3.13}$$

Nếu $f \in L_2(\mathbb{R}_+, x), h \in L_1(\mathbb{R}_+, K_0(x))$ thì $\left(f \underset{4}{*} h\right) \in L_2(\mathbb{R}_+, x)$ và có đẳng thức nhân tử hóa:

$$K\left(f \underset{4}{*} h\right)(y) = (Kf)(y)(Kh)(y), \quad \forall y > 0. \tag{3.14}$$

Bây giờ chúng ta chọn nhân :

$$K_1(x,\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi x} K_0\left(\sqrt{x^2 + \theta^2 + 2x\theta cosh\tau}\right)\ \xi(\theta)d\theta, \quad \forall x, \tau > 0,$$

$$K_2(x,\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau\theta}{x} + \frac{\tau x}{\theta} + \frac{\theta x}{\tau}\right)\right]\ \eta(\theta)d\theta, \quad \forall x, \tau > 0.$$

Khi đó (3.1) trở thành:

$$\begin{cases} f(x) + \left(\xi \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} g\right)(x) = \ q_1(x), & \forall x > 0 \\ \left(\eta \underset{4}{*} f\right)(x) + g(x) = \ q_2(x), & \forall x > 0\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

Trong đó ξ, $\eta, q_{1,2}$ là các hàm cho trước và $\xi \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\eta \in L_2(\mathbb{R}_+, x)$, $q_1(x) \in L_1^{\alpha,1}$, $\gamma_1(y) = \frac{1}{ysinh(\pi y)}, q_2(x) \in L_2(\mathbb{R}_+, x)$.

Tác động biến đổi (K) vào (3.15) và sử dụng các đẳng thức nhân tử hóa (3.12) và (3.14) ta được:

$$\begin{cases} (Kf)(y) + K\left(\xi \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} g\right)(y) = \ (Kq_1)(y), & \forall y > 0 \\ K\left(\eta \underset{4}{*} f\right)(y) + (Kg)(y) = \ (Kq_2)(y), & \forall y > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Kf)(y) + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\gamma_1(y)(F_c\xi)(y)(Kg)(y) = \ (Kq_1)(y), & \forall y > 0 \\ (K\eta)(y)(Kf)(y) + (Kg)(y) \qquad\qquad = \ (Kq_2)(y), & \forall y > 0, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ysinh(\pi y)}\ (F_c\xi)(y) \\ (K\eta)(y) & 1 \end{vmatrix} = 1 - K\left(\eta \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} g\right)(y), \quad \forall y > 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (Kq_1)(y) & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ysinh(\pi y)}\ (F_c\xi)(y) \\ (Kq_2)(y) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (Kq_1)(y) - K\left(q_2 \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} g\right)(y) = K\left(q_1 - \left(q_2 \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} g\right)\right)(y), \qquad \forall y > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & (Kq_1)(y) \\ (K\eta)(y) & (Kq_2)(y) \end{vmatrix}$$

$$= (Kq_2)(y) - K\left(\eta \underset{4}{*} q_1\right)(y) = K\left(q_2 - \left(\eta \underset{4}{*} q_1\right)\right)(y), \qquad \forall y > 0.$$

$Nếu:\ 1 - K\left(\eta \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} \xi\right)(y) \neq 0, \forall y > 0\ thì$

$$(Kf)(y) = \frac{K\left(q_1 - \left(q_2 \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} g\right)\right)(y)}{1 - K\left(\eta \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} \xi\right)(y)}$$

$$\Rightarrow f(x) = K^{-1}\left(\frac{K\left(q_1 - \left(q_2 \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} g\right)\right)(y)}{1 - K\left(\eta \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} \xi\right)(y)}\right)(x) \tag{3.16}$$

$$(Kg)(y) = \frac{K\left(q_2 - \left(\eta \underset{4}{*} f\right)\right)(y)}{1 - K\left(\eta \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} \xi\right)(y)}$$

sử dụng biến đổi ngược :

$$g(y) = K^{-1}\left(\frac{K\left(q_2 - \left(\eta \underset{4}{*} f\right)\right)(y)}{1 - K\left(\eta \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} \xi\right)(y)}\right)(x). \tag{3.17}$$

Định lý 3.2.

Giả sử $1 - K\left(\eta \overset{\gamma_1}{\underset{3}{*}} \xi\right)(y) \neq 0, \forall y > 0$. Khi đó hệ phương trình (3.1) có nghiệm dạng (3.16) và (3.17) và $f \in L_1^{\alpha,1}$, $g \in L_1^{\alpha,1} \cap L_2(\mathbb{R}_+, x), \alpha \epsilon \mathbb{R}$.

Nhận xét. Các kết quả của Định lý 3.1 và 3.2 không sử dụng đến Định lý Wiener–Lévy như các công trình trước đó trong ([3],[5],[15],[16],[14]) mà chỉ sử dụng đến các phép biến đổi ngược đối với các phép biến đổi tích phân Kontorovich–Lebedev và Fourier sine ngược❒

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] H.H. Kagiwada, R. Kalaba (1971), *Integral equation via embedding method*, Applied Mathematics and Computation, No. 6, Reading, MA, Addison-Wesley 1964.

[2] V.A. Kakichev (1967), *On the Convolution for Integral transforms (in Russian).* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., no. 2, 53 62.

[3] N.X. Thao, V.K. Tuan, and H.T.V. Anh (2014), *On the Toeplitz plus Hankel integral equation II*, Int. Tran. & Spec. Func., Vol. 25, No. 1, 75-84.

[4] J.N. Tsitsiklis and B.C. Levy (1981), *Integral equations and resolvents of Toeplitz plus Hankel kernels*. Laboratory for Information and Deci-sion Systems, Massachusetts Institute of Technology. Series/Report No.: LIDS-P 1170.

[5] N.T. Thao, V.K Tuan, N.T. Hong (2011), *On the Toeplitz plus Hankel integral equations*, Int. Tran. & Spec. Func. Vol. 22, No. 10, 723 737.

[6] T.Tuan, P.V. Hoang, N.T. Hong (2018), *Integral equation of Toeplitz plus Hankel's type and parabolic equation related to the Kontorovich-Lebedev - Fourier generalized convolutions*, Math. Meth. Appl. Sci. Vol.41, p. 8171-8181.

[7] H. Bateman (1954), *Table of integral transforms*, McGraw - Hill, New York.

[8] S.B. Yakubovich (1996), *Index Transforms*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London -Hong Kong.

[9] S.B. Yakubovich, L.E. Britvina(2009), *Convolution operators related to the Fourier cosine and Kontorovich-Lebedev transformations,* Result Math, 55(1-2):175 197.

[10] S.B. Yakubovich, L.E. Britvina (2010), *Convolutions related to the Fourier and Kontorovich-Lebedev transforms revisited*, Int. Tran. & Spec. Func. Vol.21(3-4), p.259 276.

[11] T. Tuan, N.X. Thao and N.V. Mau (2010), *On the generalized convolu-tion for the Fourier sine and the Kontorovich-Lebedev transforms*, Acta Mathematica Vietnamica , Vol.35, N.2, p.303-317.

[12] T. Tuan, N.T. Hong, P.V. Hoang (2016), *Generalized convolution for the Kontorovich-Lebedev, Fourier transforms and applications to acoustic fields*, Acta Math Vietnamica, 2016, Vol.42, N.2, 355-367.

[13] M.G. Krein (1955), *On a New Method for Solving Linear Integral Equa-tions of the First and Second Kinds*, Dokl. Nauk. CCCP, Vol.100, p.413-416 (in Russian).

[14] N.X. Thao, T.Tuan, L.X. Huy (2014), *The generalized convolution with a weight function for Laplace transform,* Nonlinear Functional Analysis and Applications, Vol.19, No. 1, pp. 61-77.

[15] T. Tuan (2007), *On the Generalized Convolution with a Weight Func-tion for the Fourier Cosine and the Inverse Kontorovich-Lebedev Integral Transformations*, Nonlinear Func. Anal. Appl. Vol.12, No. 2, p.325-341.

[16] T.Tuan, N.X. Thao (2011), *A new Polyconvolution and its application to solving a class of Toeplitz plus Hankel integral equation and systems of integral equations*, Vietnam Journal of Mathematics, Vol.39, No.2, p.217-235.

(*Ngày nhận bài: 11/01/2019; ngày phản biện: 14/03/2019; ngày nhận đăng: 03/06/2019)*