

PHƯƠNG TRÌNH TÁN SẮC CHÍNH XÁC CỦA SÓNG RAYLEIGH TRUYỀN TRONG BÁN KHÔNG GIAN CÓ ỨNG SUẤT TRƯỚC PHỦ MỘT LỚP MỎNG CÓ ỨNG SUẤT TRƯỚC**Nguyễn Thị Khánh Linh¹**

Tóm tắt: Bài báo nghiên cứu sự truyền sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi có ứng suất trước phủ một lớp mỏng đàn hồi có ứng suất trước. Để giải quyết bài toán, tác giả lần lượt đi tìm các mối liên hệ giữa biên độ ứng suất và biên độ chuyển dịch của lớp và của bán không gian. Từ các mối liên hệ này kết hợp với điều kiện biên và điều kiện liên tục giữa lớp và bán không gian, tác giả đã tìm được phương trình tán sắc chính xác của sóng Rayleigh truyền trong môi trường này. Đồng thời để khẳng định tính chính xác của kết quả tìm được, từ công thức tìm được tác giả đưa về được trường hợp đặc biệt là phương trình tán sắc của sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi có ứng suất trước đã được tìm trong tài liệu (M. A. Dowd and R. W. Ogden 1991; Vinh, 2011). Các thức tìm ra ở dạng hoàn toàn tường minh, chúng sẽ là những công cụ rất hữu hiệu cho các nhà khoa học trong và ngoài nước.

Từ khóa: sóng Rayleigh, đàn hồi có ứng suất trước, phương trình tán sắc.

1. MỞ ĐẦU

Các bài toán truyền sóng trong môi trường đàn hồi (Achenbach, J.D. and Keshava, S.P., 1967- R. W. Ogden, 1984) có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học và kỹ thuật như Âm học, Địa chấn học, Địa vật lý, Khoa học vật liệu, Khoa học đánh giá không phá hủy, Chẩn đoán y học bằng hình ảnh, Công nghệ viễn thông,... Các cấu trúc mỏng ngày nay xuất hiện nhiều trong cuộc sống, nên bài toán nghiên cứu về sự truyền sóng trong các cấu trúc này đang được rất nhiều các nhà nghiên cứu quan tâm (Tiersten, H.F., 1969-P. C. Vinh and N. T. K. Linh, 2013)

Khi nghiên cứu về sóng, sóng mặt Rayleigh được quan tâm nhiều nhất. Đối với sóng Rayleigh, phương trình tán sắc dạng tường minh có ý nghĩa đặc biệt quan trọng. Nó được sử dụng để giải bài toán thuận (khảo sát sự phụ thuộc của vận tốc sóng vào các tham số vật liệu) và đặc biệt nó còn là cơ sở lý thuyết để giải quyết các bài toán ngược (xác định các tham số vật liệu từ các giá trị đo được của vận tốc sóng

(Viktorov, I. A., 1967). Do vậy, phương trình tán sắc dạng tường minh là mục tiêu đầu tiên và quan trọng nhất đối với các nghiên cứu liên quan đến sóng Rayleigh.

Đối với các môi trường bán không gian phủ lớp mỏng đẳng hướng và trục hướng, phương trình tán sắc đã được tìm ra trong các tài liệu tham khảo (Bovik, P., 1996; Tiersten, H.F., 1969; Vinh, 2011; Vinh, P.C., Linh, N.T.K., 2012 - P. C. Vinh and N. T. K. Linh, 2013).

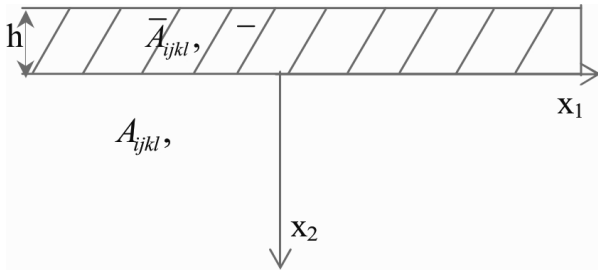
Tuy nhiên, đối với các môi trường đàn hồi có tính dị hướng cao hơn, phức tạp hơn, chẳng hạn môi trường đàn hồi monoclinic, môi trường có ứng suất trước, môi trường đàn hồi chịu ảnh hưởng của các yếu tố khác như điện trường, từ trường,.. vẫn còn đang bỏ ngõ.

Vì vậy mục tiêu của bài báo đi tìm phương trình tán sắc chính xác của sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi có ứng suất trước phủ một lớp mỏng đàn hồi có ứng suất trước.

2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Xét một lớp vật liệu thuần nhất có độ dày h , phủ lên một bán không gian thuần nhất, giả thiết cả lớp và bán không gian là đàn hồi nén được có ứng suất trước.

¹ Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi



Các hướng chính của biến dạng trong lớp và bán không gian là trùng nhau và vuông góc với mặt phẳng $x_2=0$. Một trục tọa độ Cartesian vuông góc (x_1, x_2, x_3) được sử dụng với các trục của nó trùng với các hướng chính của biến dạng. Lớp vật liệu chiếm miền $-h < x_2 < 0$ và bán không gian chiếm miền tương ứng $x_2 > 0$. Các độ giãn chính của bán không gian và lớp được ký hiệu tương ứng với $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ và $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$. Bán không gian

$$\bar{J} \bar{A}_{ijkl} = \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_i \partial \bar{\lambda}_j} \quad (3)$$

$$\bar{J} \bar{A}_{ijkl} = \begin{cases} \left(\bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_i} - \bar{\lambda}_j \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_j} \right) \frac{\bar{\lambda}_i^2}{\bar{\lambda}_i^2 - \bar{\lambda}_j^2} & (i \neq j, \bar{\lambda}_i \neq \bar{\lambda}_j) \\ \frac{1}{2} \left(\bar{J} \bar{A}_{ijkl} - \bar{J} \bar{A}_{ijij} + \bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_i} \right) & (i \neq j, \bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_j) \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{và } \bar{J} \bar{A}_{ijij} = \bar{J} \bar{A}_{jijj} = \bar{J} \bar{A}_{ijij} - \bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_i} \quad (i \neq j) \quad (5)$$

với $i, j=1, 2, 3$, $\bar{W} = \bar{W}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)$ là hàm năng lượng biến dạng trên một đơn vị thể tích ở trạng thái tự nhiên (không biến dạng) $\bar{J} = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3$ ($\bar{\lambda}_k > 0$).

Để đơn giản trong cách trình bày, ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$\bar{\alpha}_{11} = \bar{A}_{1111}, \bar{\alpha}_{22} = \bar{A}_{2222}, \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_{21} = \bar{A}_{1222}, \bar{\gamma}_1 = \bar{A}_{1212}, \bar{\gamma}_2 = \bar{A}_{2121}, \bar{\gamma}_* = \bar{A}_{2112} \quad (6)$$

Sử dụng các phương trình trên, phương trình (2) được viết lại:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{11} &= \bar{\alpha}_{11} \bar{u}_{1,1} + \bar{\alpha}_{12} \bar{u}_{2,2}, & \bar{s}_{22} &= \bar{\alpha}_{12} \bar{u}_{1,1} + \bar{\alpha}_{22} \bar{u}_{2,2}, \\ \bar{s}_{12} &= \bar{\gamma}_1 \bar{u}_{2,1} + \bar{\gamma}_* \bar{u}_{1,2}, & \bar{s}_{21} &= \bar{\gamma}_* \bar{u}_{2,1} + \bar{\gamma}_2 \bar{u}_{1,2}, \end{aligned} \quad (7)$$

Từ các điều kiện strong-ellipticity, $\bar{\alpha}_{ik}$ và $\bar{\gamma}_k$ phải thỏa mãn các đẳng thức (R. W. Ogden, 1984):

$$\bar{\alpha}_{11} > 0, \bar{\alpha}_{22} > 0, \quad \bar{\gamma}_1 > 0, \quad \bar{\gamma}_2 > 0 \quad (8)$$

Xét sóng Rayleigh truyền theo phương x_1 và tắt dần theo phương x_2 với vận tốc sóng c (>0) và số sóng k (>0). Khi đó các thành phần chuyển dịch và ứng suất của lớp đàn hồi có dạng

$$\bar{u}_1 = \bar{U}_1(y) e^{ik(x_1 - ct)}, \quad \bar{u}_2 = \bar{U}_2(y) e^{ik(x_1 - ct)}, \quad y = kx_2 \quad (9)$$

trong đó

và lớp được giả thiết là gắn chặt. Chú ý rằng các đại lượng giống nhau của bán không gian và lớp có cùng ký hiệu nhưng phân biệt bằng dấu gạch ngang ở trên nếu liên quan đến lớp.

Đối với lớp, bỏ qua lực khối phương trình chuyển động có dạng (M. A. Dowdikh and et al, 1991; R. W. Ogden, 1984):

$$\bar{s}_{11,1} + \bar{s}_{21,1} = \bar{\rho} \ddot{u}_1, \quad \bar{s}_{12,1} + \bar{s}_{22,1} = \bar{\rho} \ddot{u}_2, \quad (1)$$

trong đó $\bar{\rho}$ là mật độ khối lượng của vật liệu ở trạng thái ban đầu.

$$\bar{s}_{ji} = \bar{A}_{ijkl} \bar{u}_{k,l} \quad (2)$$

trong đó \bar{A}_{ijkl} là các thành phần của tenxơ đàn hồi bậc 4 trong (M. A. Dowdikh and et al, 1991; R. W. Ogden, 1984) được xác định như sau:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1(y) &= A_1 \text{ch} \bar{b}_1 y + A_2 \text{sh} \bar{b}_1 y + A_3 \text{ch} \bar{b}_2 y + A_4 \text{sh} \bar{b}_2 y \\ \bar{U}_2(y) &= i(\bar{\alpha}_1 A_1 \text{sh} \bar{b}_1 y + \bar{\alpha}_1 A_2 \text{ch} \bar{b}_1 y + \alpha_2 A_3 \text{sh} \bar{b}_2 y + \alpha_2 A_4 \text{ch} \bar{b}_2 y)\end{aligned}\quad (10)$$

với A_1, A_2, A_3, A_4 là các hằng số, $\bar{\alpha}_k$ và \bar{b}_k được xác định bởi

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_k &= \frac{\bar{\gamma}_2 \bar{b}_k^2 + \bar{X} - \bar{\alpha}_{11}}{(\bar{\alpha}_{12} + \bar{\gamma}_*) \bar{b}_k}, \quad \bar{b}_1 = \sqrt{\frac{\bar{S} + \sqrt{\bar{S}^2 - 4\bar{P}}}{2}}, \quad \bar{b}_2 = \sqrt{\frac{\bar{S} - \sqrt{\bar{S}^2 - 4\bar{P}}}{2}}, \quad n = 1, 2, \quad \bar{X} = \bar{\rho} c^2 \\ \bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2 &= -\frac{\bar{\gamma}_2(\bar{X} - \bar{\gamma}_1) + \bar{\alpha}_{22}(\bar{X} - \bar{\alpha}_{11}) + (\bar{\alpha}_{12} + \bar{\gamma}_*)^2}{\bar{\gamma}_2 \bar{\alpha}_{22}} = \bar{S}, \quad \bar{b}_1^2 \bar{b}_2^2 = \frac{(\bar{X} - \bar{\alpha}_{11})(\bar{X} - \bar{\gamma}_1)}{\bar{\gamma}_2 \bar{\alpha}_{22}} = \bar{P}.\end{aligned}\quad (11)$$

Thay thế (10), (11) vào (7) và kết hợp với (9), ứng suất của lớp có dạng

$$\bar{s}_{21} = ik \bar{\Sigma}_1 e^{ik(x_1 - ct)}, \quad \bar{s}_{22} = ik \bar{\Sigma}_2 e^{ik(x_1 - ct)} \quad (12)$$

trong đó

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= i(\beta_1 A_1 \text{sh} \bar{b}_1 y + \beta_1 A_2 \text{ch} \bar{b}_1 y + \beta_2 A_3 \text{sh} \bar{b}_2 y + \beta_2 A_4 \text{ch} \bar{b}_2 y) \\ \Sigma_2 &= \bar{\eta}_1 A_1 \text{ch} \bar{b}_1 y + \bar{\eta}_1 A_2 \text{sh} \bar{b}_1 y + \bar{\eta}_2 A_3 \text{ch} \bar{b}_2 y + \bar{\eta}_2 A_4 \text{sh} \bar{b}_2 y\end{aligned}\quad (13)$$

$$\text{với } \bar{\beta}_k = \bar{\gamma}_* \bar{\alpha}_k - \bar{\gamma}_2 \bar{b}_k, \quad \bar{\eta}_k = \bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{22} \bar{\alpha}_k \bar{b}_k, \quad k = 1, 2 \quad (14)$$

Tại mặt biên $x_2=0$, phương trình (13) và (10) có dạng:

$$\begin{aligned}U_1(0) &= A_1 + A_3, \quad U_2(0) = i(\bar{\alpha}_1 A_2 + \bar{\alpha}_2 A_4), \\ \Sigma_1(0) &= i(\bar{\beta}_1 A_2 + \bar{\beta}_2 A_4), \quad \Sigma_2 = \bar{\eta}_1 A_1 + \bar{\eta}_2 A_3\end{aligned}\quad (15)$$

Từ phương trình (15), ta có:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\bar{\eta}_2}{[\bar{\eta}]} U_1(0) - \frac{1}{[\bar{\eta}]} \Sigma_2(0), \quad A_2 = \frac{i\bar{\beta}_2}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} U_2(0) - \frac{i\bar{\alpha}_2}{[\bar{\eta}]} \Sigma_1(0), \\ A_3 &= -\frac{\bar{\eta}_1}{[\bar{\eta}]} U_1(0) + \frac{1}{[\bar{\eta}]} \Sigma_2(0), \quad A_4 = -\frac{i\bar{\beta}_1}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} U_2(0) + \frac{i\bar{\alpha}_1}{[\bar{\eta}]} \Sigma_1(0)\end{aligned}\quad (16)$$

Thế (16) vào (13) và (10) tại $x_2=-h$, ta thu được mối liên hệ tuyến tính của $\bar{U}_1(-h), \bar{U}_2(-h), \bar{\Sigma}_1(-h)$, và $\bar{\Sigma}_2(-h)$ với các số hạng $\bar{U}_1(0), \bar{U}_2(0), \bar{\Sigma}_1(0)$ và $\bar{\Sigma}_2(0)$. Mối liên hệ này có dạng ma trận là:

$$\xi(-h) = T\xi(0) \quad (17)$$

$$\text{trong đó } \xi(\cdot) = [\bar{U}_1(\cdot) \bar{U}_2(\cdot) \bar{\Sigma}_1(\cdot) \bar{\Sigma}_2(\cdot)]^T \quad \text{và} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}T_1 &= \begin{bmatrix} \frac{[\bar{\eta}; \text{ch} \varepsilon]}{[\bar{\eta}]} & \frac{-i[\bar{\beta}; \text{sh} \varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \\ \frac{i[\bar{\alpha} \text{sh} \varepsilon; \bar{\eta}]}{[\bar{\eta}]} & \frac{[\bar{\alpha} \text{ch} \varepsilon; \bar{\beta}]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} \frac{i[\bar{\alpha}; \text{sh} \varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} & \frac{[\text{ch} \varepsilon]}{[\bar{\eta}]} \\ -\frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 [\text{ch} \varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} & -\frac{i[\bar{\alpha} \text{sh} \varepsilon]}{[\bar{\eta}]} \end{bmatrix}, \\ \text{với} \\ T_3 &= \begin{bmatrix} \frac{i[\bar{\beta} \text{sh} \varepsilon]}{[\bar{\eta}]} & \frac{\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 [\text{ch} \varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \\ -\frac{\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 [\text{ch} \varepsilon]}{[\bar{\eta}]} & -\frac{i[\bar{\beta}; \eta \text{sh} \varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} \frac{i[\bar{\alpha}; \bar{\beta} \text{ch} \varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} & \frac{-i[\bar{\beta} \text{sh} \varepsilon]}{[\bar{\eta}]} \\ \frac{i[\bar{\alpha}; \bar{\eta} \text{sh} \varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} & \frac{[\bar{\eta} \text{ch} \varepsilon]}{[\bar{\eta}]} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (19)$$

trong đó $\varepsilon_n = \varepsilon \bar{b}_n$, $n = 1, 2$, và $[\text{ch}\varepsilon] = \text{ch}\varepsilon_2 - \text{ch}\varepsilon_1$,
 $[\bar{\alpha}\text{ch}\varepsilon] = \bar{\alpha}_2\text{ch}\varepsilon_2 - \bar{\alpha}_1\text{ch}\varepsilon_1$, $[\bar{\alpha}; \bar{\beta}\text{sh}\varepsilon] = \bar{\alpha}_2\bar{\beta}_1\text{sh}\varepsilon_1 - \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2\text{sh}\varepsilon_2$.

Ma trận \mathbf{T} xác định bởi (18) gọi là ma trận chuyển của lớp đàn hồi có ứng suất trước nén được.

3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC BIÊN ĐỘ ỨNG SUẤT VÀ CÁC BIÊN ĐỘ CHUYỂN DỊCH TẠI MẶT BIÊN

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & -ia_{12} \\ ia_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} ib_{11} & b_{12} \\ -b_{21} & ib_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} ic_{11} & c_{12} \\ -c_{21} & ic_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} d_{11} & -id_{12} \\ id_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

các a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} được xác định bởi (19). Từ điều kiện tự do ứng suất tại $x_2 = -h$ là $\bar{s}_{12} = \bar{s}_{22} = 0$ và sử dụng phương trình (17) ta có

$$\mathbf{T}_3 \bar{\mathbf{U}}(0) + \mathbf{T}_4 \bar{\boldsymbol{\Sigma}}(0) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

Phương trình (20) là mối liên hệ giữa biên độ của véc tơ ứng suất và biên độ của véc tơ

$$u_n = U_n(y)e^{ik(x_1-ct)}, \quad \sigma_{n2} = ik\Sigma_n(y)e^{ik(x_1-ct)}, \quad n = 1, 2, \quad (21)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} U_1(y) &= i(\alpha_1 B_1 e^{-b_1 y} + \alpha_2 B_2 e^{b_2 y}), \quad U_2(y) = B_1 e^{b_1 y} + B_2 e^{-b_2 y}, \\ \Sigma_1(y) &= \beta_1 B_1 e^{-b_1 y} + \beta_2 B_2 e^{b_2 y}, \quad \Sigma_2(y) = i(\eta_1 B_1 e^{-b_1 y} + \eta_2 B_2 e^{b_2 y}), \end{aligned} \quad (22)$$

với α_k , β_k , η_k được xác định bởi

$$\alpha_k = \frac{(\alpha_{12} + \gamma_*)b_k}{\alpha_{22}b_k^2 - \gamma_1 + X} = \frac{\alpha_{11} - X - \gamma_2 b_k^2}{(\alpha_{12} + \gamma_*)b_k}, \quad \beta_k = \gamma_2 b_k + \gamma_* \alpha_k, \quad \eta_k = \alpha_{12} - \alpha_{22} \alpha_k b_k, \quad X = \rho c^2, \quad k = 1, 2, \quad (23)$$

và b_1, b_2 là hai nghiệm có phần thực dương của phương trình

$$\gamma_2 \alpha_{22} b^4 + [\gamma_2(X - \gamma_1) + \alpha_{22}(X - \alpha_{11}) + (\alpha_{12} + \gamma_*)^2] b^2 + (X - \alpha_{11})(X - \gamma_1) = 0, \quad (24)$$

với

$$b_1^2 + b_2^2 = -\frac{\gamma_2(X - \gamma_1) + \alpha_{22}(X - \alpha_{11}) + (\alpha_{12} + \gamma_*)^2}{\gamma_2 \alpha_{22}} = S, \quad b_1^2 b_2^2 = \frac{(X - \alpha_{11})(X - \gamma_1)}{\gamma_2 \alpha_{22}} = P \quad (25)$$

Ta dễ thấy nếu sóng Rayleigh tồn tại thì b_1, b_2 phải có phần thực dương, khi đó

$$0 < X < \min\{\alpha_{11}, \gamma_1\}, \quad P > 0, \quad S + 2\sqrt{P} > 0, \quad b_1 b_2 = \sqrt{P}, \quad b_1 + b_2 = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (26)$$

Thế $x_2=0$ vào (22) ta thu được

$$\begin{aligned} U_1(0) &= B_1 + B_2, \quad U_2(0) = i(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2), \\ \Sigma_1(0) &= i(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2), \quad \Sigma_2(0) = \eta_1 B_1 + \eta_2 B_2. \end{aligned} \quad (27)$$

3.1. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC BIÊN ĐỘ ỨNG SUẤT VÀ CÁC BIÊN ĐỘ CHUYỂN DỊCH CỦA LỚP

Xét sóng Rayleigh truyền dọc theo phương x_1 và tắt dần theo x_2 với vận tốc sóng c và số sóng k . Để đơn giản, các ma trận \mathbf{T}_i ($i=1,2,3,4$) được viết dưới dạng sau:

chuyển dịch của lớp tại biên phân cách $y=0$.

3.2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC BIÊN ĐỘ ỨNG SUẤT VÀ CÁC BIÊN ĐỘ CHUYỂN DỊCH CỦA LỚP

Theo Vinh (Pham Chi Vinh, 2011), các thành phần chuyển dịch và ứng suất của sóng Rayleigh trong bán không gian có dạng:

Khử B_1, B_2 từ phương trình (27) ta có

$$\Sigma(0) = \mathbf{M}\mathbf{U}(0), \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} iM_{11} & M_{12} \\ -M_{12} & -iM_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

trong đó: $M_{11} = \frac{[\alpha; \beta]}{[\alpha]}, M_{12} = \frac{[\beta]}{[\alpha]}, M_{22} = -\frac{[\eta]}{[\alpha]}$ và $\bar{\Sigma}(\cdot) = [\bar{\Sigma}_1(\cdot) \bar{\Sigma}_2(\cdot)]^T, \bar{\mathbf{U}}(\cdot) = [\bar{U}_1(\cdot) \bar{U}_2(\cdot)]^T$.

Phương trình (28) là mối liên hệ giữa biên độ của véc tơ ứng suất và chuyển dịch của bán không gian tại biên $y=0$. Ma trận \mathbf{M} là ma trận trở kháng mặt của bán không gian đàn hồi có ứng suất trước nén được.

4. PHƯƠNG TRÌNH TÁN SẮC

Từ điều kiện lóp và bán không gian gắn chặt tại $y=0$ và mối liên hệ giữa biên độ của véc tơ

chuyển dịch và ứng suất của lóp và bán không gian tại biên $y=0, \bar{U}(0) = U(0), \bar{\Sigma}(0) = \Sigma(0)$, từ (20) ta có:

$$\mathbf{T}_3 \mathbf{U}(0) + \mathbf{T}_4 \Sigma(0) = 0 \quad (29)$$

Thế (29) vào (28) dẫn tới:

$$\mathbf{Z}\mathbf{U}(0) = 0, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 \mathbf{M} \quad (30)$$

trong đó $Z_{ij} (i, j = 1, 2)$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} Z_{11} &= i(c_{11} + d_{11}M_{11} + d_{12}M_{12}), & Z_{12} &= c_{12} + d_{11}M_{12} - d_{12}M_{22}, \\ Z_{21} &= -c_{21} - d_{21}M_{11} - d_{22}M_{12}, & Z_{22} &= i(-c_{22} + d_{21}M_{12} - d_{22}M_{22}). \end{aligned} \quad (31)$$

Phương trình tán sắc thu được bằng cách $\det |Z| = 0$ có dạng:

$$A_0 + A_1 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_1 + A_2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_3 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_4 \text{ch}\varepsilon_2 \text{sh}\varepsilon_1 = 0 \quad (32)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 + \left[\frac{\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2)}{-\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 (\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2)} \right] \frac{[\beta]}{[\alpha]} - (\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_2) \frac{[\alpha; \beta][\eta] + [\beta]^2}{[\alpha]^2} \\ A_1 &= -2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 + \left[\frac{\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 (\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2)}{-\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2)} \right] \frac{[\beta]}{[\alpha]} + (\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_1) \frac{[\alpha; \beta][\eta] + [\beta]^2}{[\alpha]^2} \\ A_2 &= (\bar{\beta}_2^2 \bar{\eta}_1^2 + \bar{\beta}_1^2 \bar{\eta}_2^2) + \left(\frac{\bar{\beta}_2^2 \bar{\eta}_1 + \bar{\beta}_1^2 \bar{\eta}_2}{-\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_1^2 - \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\eta}_2^2} \right) \frac{[\beta]}{[\alpha]} - (\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_1) \frac{[\alpha; \beta][\eta] + [\beta]^2}{[\alpha]^2} \\ A_3 &= -\bar{\beta}_1 \bar{\eta}_2 [\bar{\eta}] \frac{[\alpha; \beta]}{[\alpha]} + \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_1 [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] \frac{[\eta]}{[\alpha]}, & A_4 &= \bar{\beta}_2 \bar{\eta}_1 [\bar{\eta}] \frac{[\alpha; \beta]}{[\alpha]} - \bar{\beta}_1 \bar{\eta}_2 [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] \frac{[\eta]}{[\alpha]}, \end{aligned} \quad (33)$$

với $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i (i=1, 2)$ được xác định bởi (23) và

$$\begin{aligned} \frac{[\alpha; \beta]}{[\alpha]} &= \frac{\gamma_2 (\alpha_{11} - X)(b_1 + b_2)}{\alpha_{11} - X + \gamma_2 b_1 b_2}, & \frac{[\beta]}{[\alpha]} &= \frac{\gamma_* (\alpha_{11} - X) - \alpha_{12} \gamma_2 b_1 b_2}{\alpha_{11} - X + \gamma_2 b_1 b_2}, & \frac{[\eta]}{[\alpha]} &= -\frac{\alpha_{22} \gamma_2 (b_1 + b_2) b_1 b_2}{\alpha_{11} - X + \gamma_2 b_1 b_2} \\ S &= \frac{\gamma_2 (\gamma_1 - X) + \alpha_{22} (\alpha_{11} - X) - (\alpha_{12} + \gamma_*)^2}{\gamma_2 \alpha_{22}}, & P &= \frac{(X - \alpha_{11})(X - \gamma_1)}{\gamma_2 \alpha_{22}} \end{aligned}$$

Công thức (32) được đưa về dạng không thứ nguyên bằng cách đưa vào các tham số không thứ nguyên sau:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\alpha_{11}}{\gamma_1}, e_2 = \frac{\alpha_{22}}{\gamma_1}, e_3 = \frac{\alpha_{12}}{\gamma_1}, e_4 = \frac{\gamma_*}{\gamma_1}, e_5 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, & \bar{e}_1 &= \frac{\bar{\alpha}_{11}}{\bar{\gamma}_1}, \bar{e}_2 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}_{22}}, \\ \bar{e}_3 &= \frac{\bar{\alpha}_{12}}{\bar{\gamma}_1}, e_4 = \frac{\bar{\gamma}_*}{\bar{\gamma}_1}, e_5 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_2}, & x &= \frac{X}{\gamma_1}, r_\mu = \frac{\bar{\gamma}_1}{\gamma_1}, r_\nu = \frac{c_2}{\bar{c}_2}, c_2 = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\rho}}, \bar{c}_2 = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\rho}}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Rõ ràng ta thấy phương trình tán sắc phụ thuộc vào 13 tham số không thứ nguyên: $e_k, \bar{e}_k, (k=1, 2, 3, 4, 5)$, r_μ, r_ν , ε và x , các tham số này thỏa mãn các bất đẳng thức sau

$$r_\mu > 0, r_\nu > 0, e_k > 0, \bar{e}_k > 0, \varepsilon > 0.$$

Phương trình tán sắc (32) có dạng không thứ nguyên là

$$\bar{A}_0 + \bar{A}_1 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_1 + \bar{A}_2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + \bar{A}_3 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + \bar{A}_4 \text{ch}\varepsilon_2 \text{sh}\varepsilon_1 = 0 \quad (35)$$

trong đó:

$$\bar{A}_0 = 2\bar{\beta}_1^* \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_1^* \bar{\eta}_2^* + \left[\frac{\bar{\beta}_1^* \bar{\beta}_2^* (\bar{\eta}_1^* + \bar{\eta}_2^*)}{-\bar{\eta}_1^* \bar{\eta}_2^* (\bar{\alpha}_2^* \bar{\beta}_1^* + \bar{\alpha}_1^* \bar{\beta}_2^*)} \right] \frac{[\beta]^*}{[\alpha]^*} - (\bar{\alpha}_2^* \bar{\beta}_1^* \bar{\eta}_1^* + \bar{\alpha}_1^* \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_2^*) \frac{[\alpha; \beta]^* [\eta]^* + [\beta]^*{}^2}{[\alpha]^*{}^2}$$

$$\bar{A}_1 = -2\bar{\beta}_1^* \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_1^* \bar{\eta}_2^* + \left[\frac{\bar{\eta}_1^* \bar{\eta}_2^* (\bar{\alpha}_2^* \bar{\beta}_1^* + \bar{\alpha}_1^* \bar{\beta}_2^*)}{-\bar{\beta}_1^* \bar{\beta}_2^* (\bar{\eta}_1^* + \bar{\eta}_2^*)} \right] \frac{[\beta]^*}{[\alpha]^*} + (\bar{\alpha}_2^* \bar{\beta}_1^* \bar{\eta}_2^* + \bar{\alpha}_1^* \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_1^*) \frac{[\alpha; \beta]^* [\eta]^* + [\beta]^*{}^2}{[\alpha]^*{}^2}$$

$$\bar{A}_2 = (\bar{\beta}_2^*{}^2 \bar{\eta}_1^*{}^2 + \bar{\beta}_1^*{}^2 \bar{\eta}_2^*{}^2) + \left(\frac{\bar{\beta}_2^*{}^2 \bar{\eta}_1^* + \bar{\beta}_1^*{}^2 \bar{\eta}_2^*}{-\bar{\alpha}_2^* \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_1^*{}^2 - \bar{\alpha}_1^* \bar{\beta}_1^* \bar{\eta}_2^*{}^2} \right) \frac{[\beta]^*}{[\alpha]^*} + (\bar{\alpha}_2^* \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_1^* + \bar{\alpha}_1^* \bar{\beta}_1^* \bar{\eta}_2^*) \frac{[\alpha; \beta]^* [\eta]^* + [\beta]^*{}^2}{[\alpha]^*{}^2}$$

$$\bar{A}_3 = -\bar{\beta}_1^* \bar{\eta}_2^* \left[\frac{[\alpha; \beta]^*}{[\alpha]^*} \right] + \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_1^* \left[\frac{[\eta]^*}{[\alpha]^*} \right], \quad \bar{A}_4 = \bar{\beta}_2^* \bar{\eta}_1^* \left[\frac{[\alpha; \beta]^*}{[\alpha]^*} \right] - \bar{\beta}_1^* \bar{\eta}_2^* \left[\frac{[\eta]^*}{[\alpha]^*} \right],$$

trong đó các đại lượng $\bar{\alpha}_k^*$, $\bar{\beta}_k^*$, $\bar{\eta}_k^*$, M_{11}^* , M_{12}^* , M_{22}^* , \bar{S}^* , \bar{P}^* , S^* , P^* được xác định bởi:

$$\bar{\alpha}_k^* = \frac{\bar{e}_5 \bar{b}_k^2 + r_\nu^2 x - \bar{e}_1}{(\bar{e}_3 + \bar{e}_4) \bar{b}_k}, \quad \bar{\beta}_k^* = r_\mu (\bar{e}_4 \bar{\alpha}_k^* - \frac{\bar{b}_k}{\bar{e}_5}), \quad \bar{\eta}_k^* = r_\mu \left(\bar{e}_3 + \frac{\bar{\alpha}_k^* \bar{b}_k}{\bar{e}_2} \right),$$

$$\bar{S}^* = \bar{e}_2 (1 - r_\nu^2 x) + \bar{e}_5 (\bar{e}_1 - r_\nu^2 x) - \bar{e}_2 \bar{e}_5 (\bar{e}_3 + \bar{e}_4)^2, \quad \bar{P}^* = \bar{e}_2 \bar{e}_5 (\bar{e}_1 - r_\nu^2 x) (1 - r_\nu^2 x),$$

$$\frac{[\alpha; \beta]^*}{[\alpha]^*} = \frac{e_5 (e_1 - x) \sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{e_1 - x + e_5 \sqrt{P}}, \quad \frac{[\beta]^*}{[\alpha]^*} = \frac{e_4 (e_1 - x) - e_3 e_5 \sqrt{P}}{e_1 - x + e_5 \sqrt{P}}, \quad \frac{[\eta]^*}{[\alpha]^*} = -\frac{e_2 e_5 \sqrt{P} \sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{e_1 - x + e_5 \sqrt{P}},$$

$$S^* = \frac{e_2 (e_1 - x) + e_5 (1 - x) - (e_3 + e_4)^2}{e_2 e_5}, \quad P^* = \frac{(e_1 - x)(1 - x)}{e_2 e_5}.$$

Trường hợp đặc biệt:

Khi $h = 0$, bài toán trở thành nghiên cứu sự truyền của sóng Rayleigh trong bán không gian

đàn hồi có ứng suất trước. Từ (32), ta có phương trình tán sắc của bán không gian đàn hồi có ứng suất trước:

$$\gamma_2 \left[\alpha_{12}^2 - \alpha_{22} (\alpha_{11} - X) \right] b_1 b_2 + (\alpha_{11} - X) \left[\gamma_2^* - \gamma_2 (\gamma_1 - X) \right] = 0 \quad (36)$$

hoặc từ (35), ta có phương trình tán sắc ở dạng không thứ nguyên:

$$e_5 \left[e_3^2 - e_2 (e_1 - x) \right] b_1 b_2 + (e_1 - x) \left[e_4^2 - e_5 (1 - x) \right] = 0 \quad (37)$$

Công thức (36) và (37) chính là công thức của phương trình tán sắc của sóng Rayleigh truyền trong bán không gian có ứng suất trước nén được ở dạng có thứ nguyên và ở dạng không có thứ nguyên.

Phương trình (37) trùng với phương trình (5.11) được tìm ra bởi Dowaikh và cộng sự (M. A.

Dowaikh and R. W. Ogden, 1991) và phương trình (25) được tìm ra bởi Vinh (Vinh, 2011)

5. KẾT QUẢ SỐ

Chúng ta nghiên cứu trường hợp vật liệu là ứng suất trước biến dạng phẳng đẳng hướng theo tài liệu tham khảo (D. G. Roxburgh and R. W. Ogden, 1994)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda} \quad (38) \quad \text{số đàn hồi của bán không gian có dạng:}$$

Từ các phương trình (3) - (6), ta có các hằng

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right), \quad \gamma^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right) \quad (39)$$

Các hằng số đàn hồi của lớp có dạng (39) có dấu gạch ngang ở trên. Điều kiện liên tục của ứng suất pháp theo (R. W. Ogden and D. A. Sotiropoulos, 1996).

$$\bar{\lambda} \bar{\lambda}_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \lambda \lambda_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\lambda}_2} \quad (40)$$

Khảo sát vật liệu neo-Hookean, hàm năng lượng của loại vật liệu này có dạng theo (D. G. Roxburgh and R. W. Ogden, 1994):

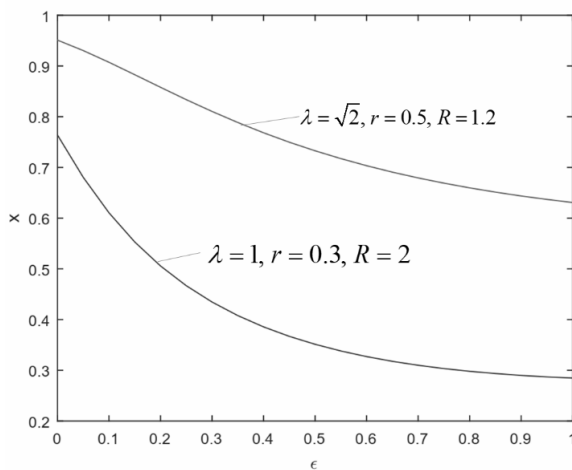
$$W = \frac{1}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3 - 2 \ln(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)) \quad (41)$$

đối với bán không gian và tương tự đối với lớp.

Từ các phương trình (38) - (41) và (34), ta có:

$$e_1 = e_2 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}, \quad e_3 = \bar{e}_3 = 0, \quad e_4 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad e_5 = \bar{e}_5 = 1, \quad \bar{e}_1 = \frac{\bar{\lambda}^2 + 1}{\bar{\lambda}^2}, \quad (42)$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\bar{e}_1}, \quad \bar{e}_4 = \frac{1}{\bar{\lambda}_2}, \quad \bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + r(1 - \lambda^2)}, \quad r_\mu = \frac{1}{r}, \quad r_\nu = \sqrt{R(\lambda^2 + 1(1 - \lambda^2))}$$



Hình 1. Biểu diễn sự phụ thuộc của vận tốc sóng Rayleigh được biểu diễn bởi (35) truyền trong vật liệu neo-Hookean

Hình 1 biểu diễn vận tốc sóng Rayleigh x được biểu diễn bởi phương trình (35) truyền trong bán không gian phủ một lớp với giả thiết là cả bán không gian và lớp là vật liệu neo-Hookean. Với vật liệu này thì các tham số vật

liệu chỉ còn phụ thuộc vào 3 tham số λ , r , R như công thức (42). Hình 1 biểu diễn sự phụ thuộc của vận tốc sóng vào $\varepsilon = kh$ trong hai trường hợp: $\lambda = 1, r = 0.3, R = 2$ và $\lambda = \sqrt{2}, r = 0.5, R = 1.2$.

6. KẾT LUẬN

Bài báo khảo sát sự truyền của sóng Rayleigh trong bán không gian có ứng suất trước nén được phủ lớp ứng suất trước nén được. Sử dụng mối quan hệ giữa các biên độ ứng suất và các biên độ chuyển dịch của lớp và bán không gian tại biên phân chia, bài báo đã thu được phương trình chính xác của sóng. Từ công thức này, tác giả đã tìm được phương trình tán sắc cho sóng Rayleigh truyền trong bán không gian có ứng suất trước bằng cách cho độ dày của lớp bằng không. Các công thức tìm được là mới và ở dạng hoàn toàn tường minh, nên chúng sẽ là những công cụ rất hữu hiệu cho các nhà khoa học trong và ngoài nước.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Achenbach, J.D. and Keshava, S.P. (1967), "Free waves in a plate supported by a semi-infinite continuum", *J. Appl. Mech.*, **34**, pp.397–404.
- Bovik, P. (1996), "A comparison between the Tiersten model and $O(H)$ boundary conditions for elastic surface waves guided by thin layers", *J. Appl. Mech.*, **63**, pp. 162–167.
- M. A. Dowdikh and R. W. Ogden (1991), *On surface waves and deformations in a compressible elastic half-space*. *Stability and Applied Analysis of Continuous Media*, 1(1), pp. 27–45.
- R. W. Ogden (1984), *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood, Chichester,.
- R. W. Ogden and D. A. Sotiropoulos, (1996). *The effect of pre-stress on guided ultrasonic waves between a surface layer and a half-space*. *Ultrasonics*, 34, (2-5), (1996), pp. 491–494.
- D. G. Roxburgh and R. W. Ogden (1994). *Stability and vibration of pre-stressed compressible elastic plates*. *International Journal of Engineering Science*, 32, (3), (1994), pp. 427–454.
- Tiersten, H.F. (1969), "Elastic surface waves guided by thin films", *J. Appl. Phys.*, **46**, pp. 770–789.
- Viktorov, I. A. (1967), *Rayleigh and Lamb waves: Physical theory and applications*, Plenum Press, New York.
- Pham Chi Vinh (2011), "On formulas for the Rayleigh wave velocity in pre-stressed compressible solids", *Wave Motion*, **48**, 613-624.
- Vinh, P.C., Linh, N.T.K., (2012). *An approximate secular equation of rayleigh waves propagating in an orthotropic elastic half-space coated by a thin orthotropic elastic layer*, *Wave Motion*, **49**, 681–689.
- Vinh, P.C., Linh, N.T.K., (2013). *An approximate secular equation of generalized Rayleigh waves in pre-stressed compressible elastic solids*. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 50, 91–96.
- Vinh, P.C., Linh, N.T.K., Anh, V.T.N., (2014). *Rayleigh waves in an incompressible orthotropic elastic half-space coated by a thin elastic layer*. *Archives Mech*, **66**, 173–184.
- P. C. Vinh and N. T. K. Linh (2013). *An approximate secular equation of generalized Rayleigh waves in pre-stressed compressible elastic solids*. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **50**, 91–96.

Abstract:

AN EXACT SECULAR EQUATIONS OF RAYLEIGH WAVES IN A COMPRESSIBLE PRE-STRESSED ELASTIC HALF-SPACES COATED WITH AN ELASTIC LAYER

This paper is concerned with the propagation of Rayleigh waves in a compressible pre-stressed elastic half-space coated with a compressible pre-stressed elastic layer. The main purpose of the paper is to establish an approximate secular equation of the wave. First, the relations between the traction amplitude vector and the displacement amplitude one of Rayleigh waves at two sides of the interface between the layer and the half-space are created. From the continuity condition at the interface and these relations the displacement amplitude vector of Rayleigh waves at the interface is determined. Then, an exact secular equation of the wave has been derived by using these relations. From this equation, an secular equation of Rayleigh wave is obtained for a compressible pre-stressed elastic half-space and this equation coincides in the equation of M. A. Dowdikh and R. W. Ogden (M. A. Dowdikh and R. W. Ogden, 1991) and Vinh (Vinh, 2011). The explicit seculars derived in this paper are useful for scientists

Keywords: Rayleigh waves, secular equation, pre-stressed,

Ngày nhận bài: 22/3/2019

Ngày chấp nhận đăng: 13/4/2019