ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 208(15): 185 - 190

ĐIỀU KIỆN CẦN HỮU HIỆU CẤP CAO CHO NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU VÀ HENIG ĐỊA PHƯƠNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ CÓ RÀNG BUỘC SỬ DỤNG ĐẠO HÀM STUDNIARSKI

Đinh Diệu Hằng[1], Khoa Thu Hoài[1], Trần Văn Sự[2]
[1]Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông - ĐH Thái Nguyên,
[2]Trường Đại học Quảng Nam

TÓM TẮT

Bài toán cân bằng vec tơ với ràng buộc cân bằng (hay còn gọi là các ràng buộc bù) bao gồm bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ với ràng buộc cân bằng như các trường hợp đặc biệt. Điều kiện chính quy và điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả. Việc tìm các điều kiện chính quy thích hợp để dẫn các điều kiện Kuhn–Tucker cho bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng là đề tài thu hút sự quan tâm nghiên cứu rộng rãi của nhiều tác giả trong những năm gần đây. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu và phát triển các điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương và nghiệm hữu hiệu Henig địa phương cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộ c tập và nón trong không gian Banach theo ngôn ngữ đạo hàm Studniaski cấp cao. Kết quả nhận được được áp dụng cho nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán dưới giả thiết phù hợp về cơ sở của nón.

Từ khóa: *Điều kiện cần hữu hiệu cấp cao, nghiệm hữu hiêu yếu địa phương, nghiệm hữu hiệu Henig địa phương, nghiệm siêu hữu hiệu địa phương, đạo hàm Studniaski cấp cao*.

Ngày nhận bài: 08/10/2019; Ngày hoàn thiện: 04/11/2019; Ngày đăng: 27/11/2019

HIGHER ORDER NECESSARY EFFICIENCY CONDITIONS FOR LOCAL WEAK AND HENIG EFFICIENT SOLUTIONS OF VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS WITH CONSTRAINTS USING STUDNIARSKI'S DERIVATIVES

Dinh Dieu Hang[1], Khoa Thu Hoai[1], Tran Van Su[2]
[1]University of Information and C ommunication Technology – TNU,
[2]Quang Nam University

ABSTRACT

The vector quilibrium problem with equilibrium constraints (it also called complementarity constraints) including vector variational inequalities and vector optimization problems with equilibrium constraints as special cases. The constraint qualification and optimality condition for optimization problems with equilibrium constraints are investigated by a lot of authors. Finding the suitable contraint qualifications to derive the Kuhn-Tucker conditions for optimization problems with equilibrium constraints have been extensively studied in recent years by many authors. In this article we study and develop the efficiency conditions for local weak efficient solution and local Henig efficient solution of vectơ equilibrium problems with constraints involving set and cone in Banach spaces in terms of higher order Studniaski' derivatives. The result obtained is applied for local superefficient solution of the problem under the suitable assumptions on the base of cone.

Keywords: *Higher order necessary efficiency conditions, local weak efficient solution, local Henig efficient solution, local superefficient solution, studniarski's derivative of higher order*.

Received: 08/10/2019; Revised: 04/11/2019; Published: 27/11/2019

* Corresponding author. *Email: dinhhangch16tn@gmail.com*

1 MỞ ĐẦU

Các bài toán cân bằng vectơ được quan tâm nghiên cứu nhiều trong những năm gần đây bao gồm sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, độ nhạy nghiệm, điều kiện hữu hiệu và thuật toán tìm nghiệm. Điều kiện hữu hiệu là chủ đề quan trọng được quan tâm nghiên cứu nhiều do sự áp dụng của chúng trong việc thiết kế và xây dựng thuật toán số để tìm nghiệm của bài toán cân bằng vectơ nói chung và bài toán tối ưu vectơ nói riêng (xem Gong [1]). Trong số các bài toán tối ưu thực tế khi xây dựng thuật toán số cần phải áp dụng các điều kiện hữu hiệu cấp hai và thậm chí cấp cao hơn mới có thể xử lý số liệu tốt được bởi vì thông tin điều kiện hữu hiệu cấp hai và cấp cao chứa đựng các thông tin điều kiện hữu hiệu cấp một. Bonnans-Cominetti-Shapiro 1999 đã sử dụng đạo hàm parabolic cấp hai để thiết lập điều kiện cần hữu hiệu cấp hai cho bài toán tối ưu vectơ; Gutiérrez-Jiménez-Novo 2010 đã sử dụng các tập tiếp tuyến cấp hai thiết lập điều kiện hữu hiệu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc; Guerraggio-Luc 2003 nghiên cứu điều kiện hữu hiệu cấp hai cho bài toán tối ưu đa mục tiêu vectơ với dữ liệu thuộc lớp $C^{0,1}$ và $C^{1,1}$; Jiménez-Novo 2003, 2004 đã nhận được điều kiện hữu hiệu cấp hai cho bài toán cân bằng vectơ với dữ liệu là các hàm khả vi được mô tả thông qua các tập tiếp liên cấp hai.

Năm 1986, Studniaski [2] đã giới thiệu đạo hàm Studniaski và áp dụng chúng để thiết lập điều kiện cần và đủ cho cực tiểu chặt Pareto địa phương của bài toán minimum. Tiếp đến năm 2008, Luu [3] sử dụng khái niệm đạo hàm Studniaski cấp cao đã xây dựng được điều kiện cần và đủ cấp cao cho cực tiểu chặt Pareto địa phương của bài toán tối ưu đa mục tiêu. Gần đây chúng tôi thấy rằng khái niệm đạo hàm Studniaski cấp cao chưa được áp dụng để thiết lập điều kiện cần hữu hiệu (tên gọi chung là điều kiện tối ưu) cho các nghiệm hữu hiệu yếu địa phương, nghiệm hữu hiệu Henig địa phương và nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát.

Trong bài báo này, mục đích chính của chúng tôi là sử dụng khái niệm đạo hàm Studniaski cấp cao để thiết lập một điều kiện cần hữu hiệu cấp cao cho nghiệm hữu hiệu yếu, Henig và siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ không trơn có ràng buộc tập và nón. Kết quả thu được của chúng tôi là hoàn toàn mới và chưa được nghiên cứu trước đây.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Ký hiệu X, Y và Z thay cho các không gian Banach và X^*, Y^* và Z^* thay cho không gian đối ngẫu tôpô của X, Y và Z tương ứng. Với mỗi $A \subset X$, ký hiệu $\text{int}A$, $\text{cl}A$, $\text{cone}A$ chỉ phần trong, bao đóng và hình nón sinh bởi tập A của A tương ứng, và mỗi $\overline{x} \in X$, $\delta > 0$, ký hiệu $B(\overline{x}, \delta) = \{x \in X : \|x - \overline{x}\| < \delta\}$ là một hình cầu mở tâm $\overline{x}$ với bán kính $\delta > 0$. Để cho tiện ta viết $t_n \to 0^+$ thay cho một dãy số dương hội tụ về 0, và $x_n \to x$ nghĩa là $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$. Trong Y ta xác định một thứ tự bộ phận bởi một nón lồi, đóng và có phần trong khác rỗng C, và cho K là một nón lồi trong Z. Ta viết C^+ và K^+ theo thứ tự là các nón đối ngẫu của C và K và được định nghĩa như sau.

$$C^+ = \{\xi \in Y^* : \langle \xi, c \rangle \geq 0, \ \forall c \in C\},$$

$$K^+ = \{\xi \in Z^* : \langle \xi, d \rangle \geq 0, \ \forall d \in K\}.$$

Được biết các nón C^+ và K^+ là lồi và đóng yếu*. Tựa phần trong của nón C^+ là

$$C^\sharp = \{\xi \in C^+ : \langle \xi, c \rangle > 0, \ \forall c \in C, \ c \neq 0\}.$$

Cho B là một cơ sở của nón C, nghĩa là B lồi, $C = \text{cone}B := \{tb : t \geq 0, \ b \in B\}$ và

$0 \notin \mathrm{cl}\, B$. Ký hiệu

$$C^{\Delta}(B) = \{\xi \in C^{\sharp} : \exists t > 0,\ \langle \xi, b\rangle \geq t,\ \forall\, b \in B\}.$$

Gọi B là một cơ sở của nón C, khi đó tồn tại một $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho

$$r = \inf\{\langle y^*, b\rangle \ : \ b \in B\} > \langle y^*, 0\rangle = 0.$$

Tiếp theo ta cố định một lân cận lồi mở cân đối V_B của gốc O trong Y với

$$V_B = \{y \in Y \ : \ |\,\langle y^*, y\rangle\,| < \frac{r}{2}\}.$$

Khi đó với mỗi lân cận lồi U của O với $U \subset V_B$, $\mathrm{cone}(U+B)$ là nón lồi, nhọn và $0 \notin cl(U+B)$. Do đó, $C\setminus\{0\} \subset \mathrm{intcone}(U+B)$.

Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón được ký hiệu là (CVEP) và được định nghĩa như sau: Cho song hàm $F : A \times A \to Y$ thỏa mãn $F(x,x) = 0$ với mọi $x \in A$; hàm mục tiêu $g : A \to Z$. Xét bài toán (CVEP): Tìm vectơ $\overline{x} \in S$ thỏa mãn

$$F(\overline{x}, x) \notin -\mathrm{int}\, C,\ \ \forall\, x \in S. \qquad (2.1)$$

Trong đó, tập chấp nhận được của bài toán (CVEP) được ký hiệu bởi $S = \{x \in A : g(x) \in -K\}$.
Vectơ $\overline{x}$ thỏa (2.1) được gọi là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (CVEP). Nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho (2.1) đúng với mọi $x \in S \cap B(\overline{x}, \delta)$, ta nói $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (CVEP). Để cho tiện trong chứng minh, với mỗi $\overline{x} \in X$ ta ký hiệu

$$F_{\overline{x}}(S) = F(\overline{x}, S) = \bigcup_{x \in S} F(\overline{x}, x).$$

Dựa vào khái niệm nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của (CVEP) trong [1] chúng tôi đề xuất các khái niệm sau.

Định nghĩa 2.1 Vectơ $\overline{x} \in S$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP) nếu tồn tại một lân cận lồi cân đối U của 0 với $U \subset V_B$ và một số thực $\delta > 0$ thỏa mãn

$$\mathrm{cone}(F_{\overline{x}}(S \cap B(\overline{x}, \delta))) \cap (-\mathrm{intcone}(U+B)) = \emptyset.$$

Định nghĩa 2.2 Vectơ $\overline{x} \in S$ được gọi là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP) nếu với mỗi lân cận V của 0, tồn tại một lân cận U của 0 và một số thực $\delta > 0$ thỏa mãn

$$\mathrm{cone}(F_{\overline{x}}(S \cap B(\overline{x}, \delta))) \cap (U - C) \subset V.$$

Xem $K \cap B(\overline{x}, \delta)$ là một tập K_1, và cho B là một cơ sở lồi của nón C. Áp dụng kết quả của Gong [1] ta nhận được kết quả:

- (+) Nếu $\overline{x} \in S$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP) thì nó cũng là một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán đó.
- (+) Nếu thêm tập B đóng và bị chặn thì trường hợp ngược lại cũng đúng và ta có đẳng thức đúng $\mathrm{int}C^+ = C^{\Delta}(B)$.

Tiếp theo chúng tôi định nghĩa đạo hàm Studniaski cấp cao như trong [2].

Định nghĩa 2.3 ([2]) Cho $f : X \to Y$, $\overline{x}, v \in X$ và $m \geq 1$. Đạo hàm Studniaski cấp m của f tại $(\overline{x}, v)$ được ký hiệu bởi $d_S^m f(\overline{x}, v)$ và được định nghĩa như sau:

$$d_S^m f(\overline{x}; v) = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ u \to v}} \frac{f(\overline{x} + tu) - f(\overline{x})}{t^m},$$

nếu giới hạn tồn tại. Trong trường hợp $m = 1$, ta viết $d_S f(\overline{x}; v)$ thay cho $d_S^1 f(\overline{x}; v)$.

Các nón tiếp liên sau giữ vai trò chủ đạo trong việc thiết lập điều kiện cần hữu hiệu cấp cao cho các loại nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP).

Định nghĩa 2.4 ([3]) Nón tiếp liên của tập A tại điểm $\overline{x} \in cl\, A$ được định nghĩa bởi

$$T_A(\overline{x}) = \{v \in X \ : \exists\, t_n > 0,\ \exists\, x_n \in A,\ x_n \to \overline{x} \text{ sao cho } t_n(x_n - \overline{x}) \to v\}.$$

Định nghĩa 2.5 ([3]) Nón phần trong của nón tiếp liên của tập A tại điểm $\overline{x} \in cl\, A$ được định nghĩa bởi

$$IT_A(\overline{x}) = \{v \in X \ : \exists\, t_n \to 0^+ \text{ sao cho } \forall\, v_n \to v,\ \overline{x} + t_n v_n \in A,\ \forall\, n \text{ đủ lớn}\}.$$

Mệnh đề 2.6 ([4]) Nón tiếp liên của tập A tại điểm $\overline{x} \in cl\, A$ được phát biểu ở dạng tương đương sau

$$T_A(\overline{x}) = \{v \in X \ : \exists\, x_n \in A \setminus \{\overline{x}\},\ x_n \to \overline{x} \text{ sao cho } \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - \overline{x}}{\|x_n - \overline{x}\|} = \frac{v}{\|v\|}\} \cup \{0\}.$$

Ta định nghĩa nón tiếp liên trung gian

$$\widetilde{T}_A(\overline{x}) = \{v \in X \ : \exists\, t_n \to 0^+ \text{ sao cho } \overline{x} + t_n v \in A,\ \forall\, n \text{ đủ lớn}\}.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$IT_A(\overline{x}) \subset \widetilde{T}_A(\overline{x}) \subset T_A(\overline{x}).$$

3 KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Một điều kiện cần hữu hiệu cấp cao cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (CVEP) theo ngôn ngữ đạo hàm Studniaski được mô tả như sau.

Định lí 3.1 (**Điều kiện cần cấp** m **cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương**) Cho $\overline{x} \in S$, $m \geq 2$ và giả sử các đạo hàm Studniaski cấp cao $d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ và $d_S^m g(\overline{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (CVEP) thì với mọi $v \in T_A(\overline{x})$ thỏa mãn $d_S^m g(\overline{x}; v) \in -\text{int}K$, tồn tại một phiếm hàm tuyến tính khác không liên tục $\xi \in C^+$ sao cho

$$\langle \xi, d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\rangle \geq 0. \tag{3.1}$$

Chứng minh. Lấy tùy ý $v \in T_A(\overline{x}) \cap \{u \in X : d_S^m g(\overline{x}; u) \in -\text{int}K\}$. Ta chứng minh

$$d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \notin -\text{int}\, C. \tag{3.2}$$

Thật vậy, nếu điều kiện (3.2) sai, nghĩa là tồn tại $v \in T_A(\overline{x}) \setminus \{0\}$ với $d_S^m g(\overline{x}; v) \in -\text{int}K$ sao cho $d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \in -\text{int}C$. Áp dụng Mệnh đề 2.6, tồn tại các dãy $(x_n)_{n\geq 1}, (t_n)_{n\geq 1}$ và $(v_n)_{n\geq 1}$ trong đó $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ với $x_n \neq \overline{x}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ thỏa mãn $x_n \to \overline{x}$, $t_n \to 0^+$ và $v_n = \frac{x_n - \overline{x}}{t_n}$ với $v_n \to v$ khi $n \to +\infty$. Theo định nghĩa đạo hàm Studniaski cấp m ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(\overline{x} + t_n v_n) - g(\overline{x})}{t_n^m} = d_S^m g(\overline{x}; v) \in -\text{int}K.$$

Khi đó với n đủ lớn,

$$g(\overline{x} + t_n v_n) \in -K. \tag{3.3}$$

Vì

$$g(\overline{x}+t_n v_n) \in g(\overline{x}) - \text{int}K \subset -K - \text{int}K = -\text{int}K.$$

Từ (3.3) và dãy $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$, ta nhận được

$$\overline{x} + t_n v_n \in S \text{ với } n \text{ đủ lớn}. \tag{3.4}$$

Do $\overline{x} + t_n v_n \to \overline{x} \in B(\overline{x}, \delta)$ và hình cầu mở $B(\overline{x}, \delta)$ là một tập mở nên ta có Hệ quả sau:

$$\overline{x} + t_n v_n \in S \cap B(\overline{x}, \delta) \text{ với } n \text{ đủ lớn}. \tag{3.5}$$

Mặt khác ta cũng có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{\overline{x}}(\overline{x} + t_n v_n) - F_{\overline{x}}(\overline{x})}{t_n^m} = d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \in -\text{int}C.$$

Do int$C$ là tập mở nên với n đủ lớn,

$$F_{\overline{x}}(\overline{x} + t_n v_n) - F_{\overline{x}}(\overline{x}) \in -\text{int}\, C,$$

hay tương đương

$$F_{\overline{x}}(\overline{x} + t_n v_n) \in -\text{int}C \text{ với } n \text{ đủ lớn}.$$

Điều này kết hợp với (3.5) suy ra mâu thuẫn vì $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của (CVEP)!

Áp dụng định lí tách mạnh các tập lồi rời nhau $\{d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\}$ và -int$C$, với $\xi \in C^+ \setminus \{0\}$ ta có

$$\langle \xi, d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\rangle > \langle \xi, -c\rangle \quad \forall\, c \in \mathrm{int}C.$$

Lấy bao đóng của int$C$ và sử dụng tính liên tục của ánh xạ $\langle .\,.\rangle$ ta nhận được

$$\langle \xi, d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\rangle + \langle \xi, c\rangle \geq 0 \;\; \forall\, c \in C. \quad (3.6)$$

Cho $c = 0$ trong (3.6) ta nhận được kết quả $\langle \xi, d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\rangle \geq 0$, nghĩa là bất đẳng thức trong (3.1) được thỏa mãn.
Định lí được chứng minh. □

Định lí 3.2 (**Điều kiện cần cấp m cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu địa phương**) Cho $\overline{x} \in S$, $m \geq 2$ và B là một cơ sở lồi của nón C. Giả sử các đạo hàm Studniaski cấp cao $d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ và $d_S^m g(\overline{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương (tương ứng siêu hữu hiệu địa phương nếu thêm B đóng và bị chặn) của bài toán (CVEP) thì với mọi $v \in T_A(\overline{x})$ thỏa mãn $d_S^m g(\overline{x}; v) \in -\mathrm{int}K$, tồn tại một phiếm hàm tuyến tính khác không liên tục $\xi \in C^{\Delta}(B)$ (t.ứ. $\xi \in C^{\sharp}$) sao cho

$$\langle \xi, d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\rangle \geq 0. \quad (3.7)$$

Chứng minh. Để ý rằng nếu một cơ sở lồi B là đóng và bị chặn thì int$C^+ = C^{\Delta}(B)$. Ngoài ra một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương trùng với một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP). Do đó ta chỉ chứng minh cho trường hợp $\overline{x} \in S$ là nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP). Theo Định nghĩa 2.1, tồn tại một lân cận lồi cân đối U của 0 với $U \subset V_B$ và một số thực $\delta > 0$ thỏa mãn

$$\mathrm{cone}(F_{\overline{x}}(S \cap B(\overline{x}, \delta))) \cap (-\mathrm{int}D) = \emptyset, \quad (3.8)$$

ở đây $D = \mathrm{cone}(U + B)$ là một nón lồi và nhọn trong Y. Với tính chất đóng của nón $cl\,D$ và thỏa mãn quan hệ bao hàm $C \setminus \{0\} \subset \mathrm{int\,cl}D$. Ta áp dụng (3.8) kết hợp với điều kiện int D = int cl$D$ suy ra

$$\mathrm{cone}(F_{\overline{x}}(S \cap B(\overline{x}, \delta))) \cap (-\mathrm{intcl}D) = \emptyset. \quad (3.9)$$

Khi đó với mọi $v \in T_A(\overline{x})$ thỏa mãn $d_S^m g(\overline{x}; v) \in -\mathrm{int}K$, khẳng định sau đúng

$$\{d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\} \cap (-\mathrm{int\,cl}D) = \emptyset.$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 3.1, tồn tại $\xi \in [\mathrm{cone}(U + B)]^+ \setminus \{0\}$ thỏa mãn (3.7). Theo Gong [1] ta có bao hàm thức $[\mathrm{cone}(U + B)]^+ \setminus \{0\} \subset C^{\Delta}(B)$. Do đó, $\xi \in C^{\Delta}(B)$ và điều này hoàn thành chứng minh. □

Chú ý 3.3 Định lí 3.1 và 3.2 vẫn đúng nếu ta thay nón tiếp tuyến $T_A(\overline{x})$ bởi các nón $IT_A(\overline{x})$ và $\widetilde{T}_A(\overline{x})$ tương ứng. Ngoài ra, kết quả trên đúng cho trường hợp $m = 1$ và thông thường người ta hay gọi trường hợp này là điều kiện hữu hiệu cấp 1 chứ không phải cấp cao. Do đó trong bài báo chúng tôi luôn đặt điều kiện $m \geq 2$.

Để kết thúc bài báo chúng tôi cung cấp một trường hợp đặc biệt của bài toán (CVEP) là bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc tập và nón, được ký hiệu bởi (CVOP) trong đó song hàm $F(x, y) = f(y) - f(x)\ \forall\, x, y \in X$, ở đây $f : X \to Y$ là ánh xạ giá trị vectơ.

Định nghĩa 3.4 Nếu $F(x, y) = f(y) - f(x)$, $\forall\, x, y \in X$, và nếu $\overline{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương, một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương hay một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP) thì $\overline{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương, một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương hay một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVOP) tương ứng.

Định lí 3.5 (**Áp dụng cho bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc**) Cho $\overline{x} \in S$, $m \geq 2$ và giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ giá trị vectơ, các đạo hàm Studniaski cấp cao $d_S^m f(\overline{x}; v)$ và $d_S^m g(\overline{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương (tương ứng nghiệm hữu hiệu Henig địa phương nếu thêm C có cơ sở lồi B, nghiệm siêu hữu hiệu địa phương nếu thêm C có cơ sở lồi, đóng và bị chặn B) của bài toán (CVOP) thì với mọi $v \in T_A(\overline{x})$ thỏa mãn $d_S^m g(\overline{x}; v) \in -\mathrm{int} K$, tồn tại phiếm hàm tuyến tính khác không liên tục $\xi \in C^+$ (t.ứ. $\xi \in C^{\Delta}(B)$, $\xi \in \mathrm{int}\, C^+$) sao cho

$$\langle \xi, d_S^m f(\overline{x}; v) \rangle \geq 0.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa đạo hàm Studniaski cấp m, ta dễ dàng kiểm tra được điều kiện $d_S^m f(\overline{x}; v)$ tồn tại khi và chỉ khi $d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ cũng vậy, và ngoài ra ta còn có đẳng thức đúng $d_S^m f(\overline{x}; v) = d_S^m F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ với mọi $v \in T_A(\overline{x})$. Áp dụng Định lí 3.1 và 3.2 ta nhận được điều cần chứng minh. $\square$

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã thiết lập được điều kiện cần hữu hiệu cấp cao dạng đối ngẫu cho các nghiệm hữu hiệu yếu địa phương, Henig địa phương và siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón thông qua ngôn ngữ đạo hàm Studniaski cấp cao trong không gian Banach. Kết quả nhận được là mới và chưa được nghiên cứu trước đây. Trong tương lai kết quả đạt được này có thể áp dụng để xây dựng các thuật toán số cho bài toán cân bằng nói chung và bài toán tối ưu nói riêng.

5 Lời cảm ơn

Bài báo này là sản phẩm của Đề tài với mã số T2019-07-01.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] X. H. Gong, Optimality conditions for vector equilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 342, pp. 1455-1466, 2008.

[2] M. Studniaski, Necessary and suffi-cient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions, *SIAM J. cont/optim.*, 24,pp. 1044-1049, 1986.

[3] D. V. Luu, Higher-order necessary and sufficient conditions for strict local Pareto minima in terms of Studniarski's derivatives, *Optimization*, 57, pp. 593-605, 2008.

[4] G. Giorgi, A. Guerraggio, On the notion of tangent cone in mathematical programming, *Optim.,* 25, pp. 11-23, 1992.

[5] J-F. Bonnans, R. Cominetti, A. Shapiro Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets, SIAM J. Optim., 9 (2), 466-492, 1999.

[6] C. Gutierrez, B. Jiménez, V. Novo, On second-order Fritz John type optimality conditions in nonsmooth multiobjective programming, Math. Program., Ser. B,123, pp. 199-223, 2010.

[7] A. Guerraggio, D.T. Luc, Optimality conditions for $C^{1,1}$ constrained multiobjective problems, J. Optim. Theory Appl., 116, pp. 117-129, 2003.

[8] B. Jiménez, V. Novo, First and second order sufficient conditions for strict minimality in nonsmooth vector optimization, J. Math. Anal. Appl., 284, pp. 496-510, 2003.

[9] B. Jiménez, V. Novo, Second order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization, Math. Meth. Oper. Res., 58, pp. 299-317, 2003.

[10] B. Jiménez, V. Novo, Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets, Math. Meth. Oper. Res., 9, pp. 123-144, 2004.