PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO VỚI HỆ SỐ PHỤ THUỘC CÁC PHIẾM HÀM TÍCH PHÂN

Vũ Vinh Quang*, Lại Văn Trung
Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Trong các dạng phương trình vi phân bậc cao, lớp các phương trình có chứa các hệ số phụ thuộc các phiếm hàm tích phân mô tả các dạng bài toán đặc biệt trong cơ học đang được các nhà toán học quan tâm trong thời gian gần đây. Các kết quả đã nghiên cứu thường đề cập đến tính chất định tính của các bài toán, tuy nhiên việc tìm nghiệm số của các dạng bài toán này chưa được quan tâm do dạng đặc biệt của bài toán. Nội dung của bài báo gồm hai phần: phần thứ nhất trình bày kết quả xây dựng lược đồ sai phân bậc cao đối với phương trình vi phân cấp hai, phần thứ hai trình bày các kết quả xây dựng lược đồ lặp giải các phương trình vi phân bậc cao có các hệ số phụ thuộc các phiếm hàm dạng tích phân. Các kết quả thực nghiệm số trên các lược đồ sai phân bậc cao khẳng định tính hữu hiệu của các sơ đồ lặp đã đề xuất.

Từ khóa: *Phương trình vi phân bậc cao, lược đồ sai phân, phiếm hàm tích phân, sơ đồ lặp.*

Ngày nhận bài: 01/3/2019; Ngày hoàn thiện: 25/3/2019; Ngày duyệt đăng: 07/5/2019

ITERATIVE METHOD FOR SOLVING HIGHER ODER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH COEFFICIENTS DEPENDENT ON INTEGRAL FUNCTIONS

Vu Vinh Quang*, Lai Van Trung
University of Information and Communication Technology - TNU

ABSTRACT

In higher order differential equations, classes of equations contain coefficients that depend on integral functions describing special types of problems in mechanics that are of interest to scientists recently. The results studied often refer to the qualitative nature of the problems. However, finding the numerical solution of these types of problems has not been considered due to the special form of the problem. The content of the article consists of two parts: The first part presents the results of developing a higher oder differential diagram for the second order differential equation, the second part presents the results of building a loop iteration of higher oder differential equations with coefficients that depend on integral functions. The numerical experimental results on higher oder differential diagram confirm the effectiveness of the proposed iteration diagram.

Keywords: *Higher order differential equations, differential diagram, integral function, iteration diagram.*

Received: 01/3/2019; Revised: 25/3/2019; Approved: 07/5/2019

* Corresponding author: *Email: vvquang@ictu.edu.vn*

1. Giới thiệu

Khi nghiên cứu về phương trình vi phân phi tuyến tính bậc cao, một trong những kết quả đã đạt được trong những năm qua có thể kế đến các kết quả của nhóm tác giả: Đặng Quang Á, Nguyễn Thanh Hường, Ngô Thị Kim Quy. Dạng phương trình phi tuyến tổng quát nhất được xét là dạng:

$$\begin{cases} u^{4} \;\; x \;=f \;\; x,u,u^{'},u^{''},u^{'''} \;\; ,\; a<x<b, \\ a_0 u \;\; a \;-a_1 u^{'} \;\; a \;=A, b_0 u \;\; b \;+bu^{'} \;\; b \;=B, \\ c_0 u^{''} \;\; a \;-c_1 u^{'''} \;\; a \;=C, d_0 u^{''} \;\; b \;+d_1 u^{'''} \;\; b \;=D. \end{cases} \quad (1)$$

Về mặt lý thuyết, sự hội tụ của sơ đồ lặp trên đã được chứng minh bằng lý thuyết của phương trình toán tử. Việc giải số các bài toán cấp hai đã thực hiện bằng việc xây dựng các lược đồ sai phân với độ chính xác cấp 4 cho bài toán cấp hai.

$$\begin{cases} u^{''}(x)=f(x), a<x<b, \\ \alpha_0 u(a)-\alpha_1 u^{'}(a)=A, \\ \beta_0 u(b)+\beta_1 u^{'}(b)=B. \end{cases} \quad (2)$$

Các kết quả đã được công bố trong [1].

Trong các công trình gần đây, một số tác giả trên thế giới đã đề cập tới các mô hình bài toán cơ học có sự phụ thuộc tích phân. Cụ thể, trong [2], các tác giả: N. Kachakhidze, N. Khomeriki, J. Peradze, Z. Tsiklauri đã nghiên cứu mô hình bài toán được mô hình hóa bởi phương trình phi tuyến cấp hai

$$\begin{cases} \varphi\left(\int\limits_0^1 (\mathrm{w}^{''})^2 dx\right)\mathrm{w}^{''}=f(x), 0<x<1, \\ \mathrm{w}(0)=\mathrm{w}(1)=0. \end{cases} \quad (3)$$

Trong [3], các tác giả Q.A. Dang, T.L.Vu đã nghiên cứu mô hình bài toán cấp bốn phi tuyến dạng

$$\begin{cases} y^{4}-\varepsilon y^{''}-\dfrac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} (y^{'})^2 dx\right)y^{''}=p(x), 0<x<1, \\ y(0)=y(\pi)=0, y^{''}(0)=y^{''}(\pi)=0. \end{cases} \quad (4)$$

Trong [4], các tác giả T.F. Ma, A.L.M. Martinez đã xét dạng bài toán biên phi tuyến cấp 4 dạng

$$\begin{cases} u^{4}-M(\int\limits_0^L \left|u^{'}(s)\right|^2 ds)u^{''}(x)=f(x,u,\mathrm{u}^{'}), \\ u(0)=A, u(L)=B, \\ u^{''}(0)=C, u^{''}(L)=g(u^{'}(L)). \end{cases} \quad (5)$$

Có thể thấy rằng điểm chung của các mô hình bài toán (3), (4), (5) mà các tác giả đã nghiên cứu đều có các hệ số của phương trình phụ thuộc tích phân của hàm cần tìm. Để nghiên cứu các bài toán này, chúng ta có thể sử dụng các phương pháp biến đổi để chuyển các thành phần phụ thuộc tích phân sang vế phải của phương trình chuyển các bài toán đang xét về dạng bài toán (1). Khi đó có thể nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp lặp bằng các phương trình toán tử và việc tính toán số sử dụng các lược đồ sai phân với độ chính xác bậc bốn của dạng bài toán (2). Hiển nhiên khi thực hiện phép biến đổi, thành phần vế phải sẽ trở nên phức tạp hơn vì sẽ chứa thêm thành phần hàm $f(x)$. Một cách tự nhiên, chúng ta cần nghiên cứu phương pháp giải các bài toán trên mà không cần chuyển các thành phần chứa tích phân sang vế phải.

Để giải quyết vấn đề trên, trong bài báo này chúng tôi trình bày việc xây dựng phương pháp lặp tổng quát cho mô hình các bài toán có hệ số phương trình chứa thành phần tích phân của đạo hàm cần tìm và lược đồ sai phân với độ chính xác cấp bốn cho bài toán cấp hai dạng tổng quát hơn.

Bài báo gồm 5 phần, sau Phần giới thiệu là Phần 2, trình bày lược đồ sai phân với độ chính xác bậc cao; Phần 3, trình bày mô hình bài toán biên với hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân và sơ đồ lặp để giải bài toán; Phần 4, trình bày cá kết quả thực nghiệm và Phần 5 là phần Kết luận.

2. Lược đồ sai phân với độ chính xác bậc cao

Trong phần này chúng ta xét dạng bài toán biên tổng quát

$$\begin{cases} \eta_0 u'' - \eta_1 u(x) = f(x), a < x < b, \\ \alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = A, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B. \end{cases} \qquad (6)$$

Chúng ta sẽ xây dựng lược đồ sai phân tìm nghiệm số của bài toán với độ chính xác bậc 4.

2.1 Phương pháp sai phân đạo hàm

Xét công thức khai triển Taylor

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu' + \frac{h^3}{2}u'' \pm \frac{h^3}{6}u^{3} + \frac{h^4}{24}u^{4} + ... + O(h^n).$$

Trong đó h kí hiệu là bước lưới. Xuất phát từ (8), ta nhận được $u^{4} = \frac{1}{\eta_0}\left(f'' + \eta_1 u''\right)$

Thay vào công thức Taylor, ta nhận được

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i^{(3)} + \frac{h^4}{24\eta_0}(f_i'' + \eta_1 u_i'') + O(h^4),$$

$$u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i^{(3)} + \frac{h^4}{24\eta_0}(f_i'' + \eta_1 u_i'') + O(h^4).$$

Từ đây suy ra $u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + h^2 u_i'' + \frac{h^4}{12\eta_0}(f_i'' + \eta_1 u_i'') + O(h^4)$.

Hay $u_i'' = \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2(1 + \frac{h^2}{12\eta_0}\eta_1)} - \dfrac{h^2}{12\eta_0}f_i'' + O(h^4)$.

Đặt
$$k^2 = h^2\left(1 + \frac{h^2}{12\eta_0}\eta_1\right).$$

Vậy ta có lược đồ sai phân với độ chính xác cấp 4

$$\eta_0\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{k^2} - \eta_1 u_i = f_i + \frac{h^2}{12}f_i''; i = 1,2,...,n-1,$$
$$u_{i-1} - \left(2 + k^2\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)u_i + u_{i+1} = \frac{k^2}{\eta_0}f_i + \frac{h^2k^2}{12\eta_0}f_i''; i = 1,2,...,n-1. \qquad (7)$$

Sử dụng các công thức tính đạo hàm với độ chính xác bậc cao

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4\right) + O(h^4),$$
$$f'(x_n) = \frac{1}{12h}\left(25f_n - 48f_{n-1} + 36f_{n-2} - 16f_{n-3} + 3f_{n-4}\right) + O(h^4),$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{12h^2}\left(35f_0 - 104f_1 + 114f_2 - 56f_3 + 11f_4\right) + O\left(h^2\right),$$
$$f''(x_1) = \frac{1}{12h^2}\left(11f_0 - 20f_1 + 6f_2 + 4f_3 - f_4\right) + O\left(h^2\right),$$
$$f''(x_k) = \frac{1}{12h^2}\left(-f_{k-2} + 16f_{k-1} - 30f_k + 16f_{k+1} - f_{k+2}\right) + O\left(h^2\right),$$
$$f''(x_{n-1}) = \frac{1}{12h^2}\left(11f_n - 20f_{n-1} + 6f_{n-2} + 4f_{n-3} - f_{n-4}\right) + O\left(h^2\right),$$
$$f''(x_n) = \frac{1}{12h^2}\left(35f_n - 104f_{n-1} + 114f_{n-2} - 56f_{n-3} + 11f_{n-4}\right) + O\left(h^2\right).$$

Ta thu được hệ phương trình sai phân với độ chính xác cấp 4 đối với bài toán (6) như sau

$$(12h\alpha_0 - 25\alpha_1)u_0 - \alpha_1\left(48u_1 - 36u_2 + 16u_3 - 3u_4\right) = 12hA,$$
$$u_{i-1} - (2 + k^2\frac{\eta_1}{\eta_0})u_i + u_{i+1} = \frac{k^2}{\eta_0}f_i + \frac{h^2k^2}{12\eta_0}f_i''; i = 1,2,...,n-1,$$
$$(12h\beta_0 - 25\beta_1)u_n + \beta_1\left(-48u_{n-1} + 36u_{n-2} - 16u_{n-3} + 3u_{n-4}\right) = 12hB.$$

Ta thu được hệ đại số tuyến tính

$$AU = F, \tag{8}$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & 0 & & & & \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
... & & & & ... & ... & & & & \\
 & & & & & a_{n-3n-4} & a_{n-3n-3} & a_{n-4n-3} & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & a_{n-2n-3} & a_{n-2n-2} & a_{n-2n-1} & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\
 & & & & & a_{nn-4} & a_{nn-3} & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn}
\end{pmatrix};$$

$$U = \left(u_0, u_1, ..., u_n\right)^T; F = \left(F_0, F_1, ..., F_n\right)^T.$$

Nhận xét

- Hệ phương trình sai phân (8) chính là hệ phương trình sai phân tương ứng với bài toán biên cho phương trình vi phân (6) với độ chính xác cấp 4.
- Ma trận A của hệ không phải dạng 3 đường chéo, do đó hệ không giải được bằng thuật toán truy đuổi.

2.2 Thủ tục biến đổi cơ bản

Theo tính chất của hệ đại số tuyến tính, hệ sẽ không thay đổi nếu ta nhân một hàng tùy ý với một số k sau đó cộng vào hàng 1. Sử dụng tính chất trên, ta biến đổi ma trận của hệ (8) về dạng ba đường chéo qua bốn bước theo sơ đồ tính toán như sau:

$$a_{03} := a_{03} - \left(2 + k^2\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)a_{04}; a_{02} := a_{02} - a_{04};$$
$$a_{02} := a_{02} - \left(2 + k^2\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)a_{03}; a_{01} := a_{01} - a_{03};$$
$$a_{01} := a_{01} - \left(2 + k^2\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)a_{02}; a_{00} := a_{00} - a_{02};$$
$$F_1 := F_1 - a_{04}F_4 - a_{03}F_3 - a_{02}F_2.$$

Các sơ đồ tính toán trên cũng được thực hiện tương tự đối với hàng thứ $n+1$ của hệ do tính chất đối xứng.

Hiển nhiên qua sơ đồ tính toán trên, ma trận của hệ được chuyển về dạng 3 đường chéo. Sơ đồ tính toán trên được viết thành một thủ tục chuẩn biến đổi hệ ban đầu về hệ mới dạng ba đường chéo. Dễ kiểm tra thấy rằng các hệ số của hệ sau khi biến đổi thỏa mãn tính chất

$$\left|a_{00}\right| > \left|a_{01}\right|, \left|a_{nn}\right| > \left|a_{n-1n}\right|, \left|a_{ii}\right| = \left|a_{ii-1}\right| + \left|a_{ii+1}\right|, \forall i = 1,2,...,n-1.$$

Tức là hệ thu được là hệ ba đường chéo có tính chất chéo trội.

Hệ (8) sau khi biến đổi giải được bằng thuật toán ba đường chéo với độ phức tạp tính toán O(n). Thuật toán giải hệ được thiết kế thành thủ tục chuẩn **qtr4(…).m** bằng ngôn ngữ Matlab.

Bảng 1. *Một số kết quả kiểm tra sai số đối với qtr4.m*

$$\eta_0 = 9, \eta_1 = 5, \alpha_0 = 3, \alpha_1 = 2, \beta_0 = 4, \beta_1 = 7.$$

Lưới chia	$\sin x + \cos x$	e^{-x}	$e^x + x^4 + \cos x$
10	7.9e-6	5.6e-6	1.2e-5
50	1.6e-8	1.1e-8	2.8e-8
100	1.0e-9	7.1 e-10	1.8e-9
200	6.4e-11	4.6e-11	1.2e-10
500	2.7e-11	1.1e-11	5.3e-11
1000	1.0e-12	1.0e-12	2.2e-12

Thủ tục qtr4.m luôn luôn được sử dụng để tìm nghiệm số cho các sơ đồ lặp sẽ được đề xuất trong các mục tiếp sau.

3. Mô hình bài toán biên với hệ số phụ thuộc các phiếm hàm tích phân

Trong phần này, chúng tôi trình bày việc giải quyết một dạng mô hình bài toán được mô tả bằng các bài toán biên cho phương trình vi phân. Điểm khác biệt cơ bản là các hệ số của phương trình vi phân sẽ chứa tính phân của đạo hàm của hàm cần tìm

$$\begin{cases} p_1\left(\int_a^b \left|u'\right|^2 ds\right) u'' + p_2\left(\int_a^b \left|u'\right|^2 ds\right) u = f(x), a < x < b, \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A; b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B. \end{cases} \quad (9)$$

Đây chính là dạng tổng quát của bài toán đã được các tác giả N. Kachakhidze, N. Khomeriki, J. Peradze, Z. Tsiklauri đưa ra trong [2]. Với bài toán trong [2], bằng cách đặt $u = \lambda v,$ bài toán chuyển về dạng bài toán $\begin{cases} v'' = f, 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$

Từ đó bằng cách xác định tham số λ để tìm nghiệm của bài toán.

Cần lưu ý rằng phương pháp trên chỉ áp dụng được cho bài toán cụ thể (3) do các tác giả đặt ra. Khác với các tác giả trên, chúng tôi xét bài toán tổng quát hơn và đề xuất phương pháp giải quyết bài toán như sau:

Đặt $\xi = \int_a^b \left|u'(s)\right|^2 ds$, khi đó bài toán (9) có dạng

$$\begin{cases} p_1(\xi) u''(x) + p_2(\xi) u(x) = f(x), a < x < b, \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A; b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B. \end{cases} \quad (10)$$

Hiển nhiên nếu xác định được ξ thì nghiệm số của bài toán sẽ được tìm từ thủ tục qtr4.m. Chúng ta xây dựng thuật toán lặp như sau:

Thuật toán :

Bước 1: Xuất phát $\xi_0 = 0$;

Bước 2: Với mọi $k = 0, 1, 2, \dots$ giải liên tiếp hai bài toán

$$\begin{cases} p_1(\xi_k)u_k'' - p_2(\xi_k)u_k = f(x), a < x < b, \\ a_0 u_k(a) - a_1 u_k'(a) = A; \\ b_0 u_k(b) + u_1 v_k'(b) = B; \end{cases} \quad (11)$$

Hiệu chỉnh

$$\xi_{k+1} = \int_a^b |u_k'(s)|^2 ds .$$

MỘT SỐ KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM

Trước tiên, chúng ta xét bài toán được các tác giả N. Kachakhidze, N. Khomeriki, J. Peradze, Z. Tsiklauri đưa ra trong tài liệu [2]

$$\begin{cases} p_1(\int_0^1 (u'(s))^2 ds) u''(x) = f(x), 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Trong đó

$$p_1(z) = 2\text{-cos(pi*(z+1)/(z+2))}; \text{f(x)} = \frac{6+8\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi^2+3}} 2\pi\cos\pi x - \pi^2 (x-1)\sin\pi x .$$

Bài toán trên có nghiệm đúng là $u_d(x) = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi^2+3}}(x-1)\sin\pi x.$

Đây là trường hợp đơn giản của dạng 1 với điều kiện biên Dirichlet. Áp dụng thuật toán 1, chúng tôi nhận được kết quả như sau:

Bảng 2. *Kết quả số so sánh tài liệu [2]*

Số bước lặp	Sai số	Số bước lặp	Sai số
1	0.3644	6	5× e-6
2	0.0248	7	6× e-7
3	0.0032	8	8× e-8
4	3× e-4	9	1× e-8
5	4× e-5	10	3× e-9

Có thể thấy rằng phương pháp lặp hội tụ rất nhanh và sai số đạt được là tốt hơn nhiều so với sai số trong tài liệu [2] đã công bố (Sai số e-3).

Sau đây chúng tôi đưa ra một số kết quả tính toán với các hàm hệ số được chọn là tùy ý, điều kiện biên Neumann;

Bảng 3. *Kết quả kiểm tra đối với thuật toán 1*

$$p_1(z) = e^{-z} + 1; p_2(z) = \cos z + 1.5; a = 0, b = 1,$$
$$\alpha_0 = 2; \alpha_1 = 3; \beta_0 = 5; \beta_1 = 4, N = 100.$$

$u_d = x^2 - x^3 + 1$		$u_d = \sin\pi x$		$u_d = e^x$		$u_d = \cos x + e^{-x} + x^3$	
K	ε	K	ε	K	ε	k	ε
2	0.0028	5	0.058	1	0.2593	2	0.265
4	3× e-5	10	0.0076	2	7× e-4	4	3× e-4
6	3× e-7	15	0.001	3	3× e-5	6	4× e-6
8	4× e-9	20	1× e-4	4	1× e-6	8	5× e-8
10	8× e-11	30	3× e-6	5	9× e-8	10	2× e-10
12	3× e-11	45	3× e-7	6	6× e-9		

Bảng 4. *Kết quả kiểm tra đối với thuật toán 1*

$p_1(z) = e^{-z}; p_2(z) = \cos z; a = 0, b = 1,$

$\alpha_0 = 2; \alpha_1 = 3; \beta_0 = 5; \beta_1 = 4, N = 100.$

$u_d = x^2 - x^3 + 1$		$u_d = \sin \pi x$		$u_d = e^x$		$u_d = \cos x + e^{-x} + x^3$	
K	ε	K	ε	K	ε	k	ε
10	$6\times$ e-8	Không hội tụ		5	$7\times$ e-5	5	$5\times$ e-6
20	$4\times$ e-11			10	$1\times$ e-9	10	$6\times$ e-10

4. Kết luận

Giải các phương trình vi phân cấp cao mà đặc biệt là lớp các phương trình vi phân cấp cao có hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân là rất có ý nghĩa trong cơ học. Bài báo đã trình bày việc giải số cho bài toán phương trình vi phân cấp hai tổng quát với hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân. Đây là một kết quả rất quan trọng để chúng tôi tiếp tục nghiên cứu và giải quyết các bài toán vi phân cấp cao hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Vũ Vinh Quang, Nguyễn Thanh Hường (2017), *Lược đồ sai phân giải bài toán biên cho phương trình vi phân tuến tính và phi tuyến tính cấp cao*, Hội nghị khoa học Quốc gia FAIR 10, 107-126.

[2]. N. Kachakhidze, N. Khomeriki, J. Peradze, Z. Tsiklauri (2016), "Chipot's method for a one-dimensional Kirchohoff static equation", *Numer Algor* ,73, 1091-1106.

[3]. Quang A. Dang, Vu Thai Luan (2010), "Iterative method for solving a nonlinear fourth order boundary value problem", *Computers and Mathematics with Applications,* 60, 112-121.

[4]. T. F. Ma, A.L. M. Martinez (2010), "Positive solution for a fourth order equation with nonlinear buondary conditions", *Mathematics and Coputers in Simulation,* 80, 2177-2184.