ISSN: 1859-2171 TNU Journal of Science and Technology 195(02): 25 - 30

SỰ TỒN TẠI DUY NHẤT NGHIỆM VÀ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN PHI TUYẾN CẤP BỐN ĐẦY ĐỦ

Ngô Thị Kim Quy*, Nguyễn Thị Thu Hường
Trường Đại học Kinh tế và Quản trị Kinh doanh – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán giá trị biên phi tuyến cấp bốn đầy đủ

$$u^{(4)}(x) = f\left(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)\right), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = u''(1) = u'''(1) = 0. \tag{2}$$

trong đó $f : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

Chúng tôi đưa bài toán ban đầu về phương trình toán tử đối với hàm vế phải. Xét hàm này trong miền bị chặn xác định, với một số điều kiện dễ kiểm tra chứng tỏ rằng toán tử này có tính chất co. Điều này bảo đảm bài toán gốc có nghiệm duy nhất và sự hội tụ của phương pháp lặp để tìm nghiệm gần đúng. Chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ minh họa cho hiệu quả của phương pháp.

Từ khóa: *Bài toán giá trị biên, phi tuyến, cấp bốn đầy đủ, tồn tại duy nhất nghiệm, phương pháp lặp*

Ngày nhận bài: 20/12/2018; Ngày hoàn thiện: 04/01/2019; Ngày duyệt đăng:28/02/2019

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A SOLUTION AND ITERATIVE METHOD FOR SOLVING A FULLY FOURTH ORDER NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM

Ngo Thi Kim Quy*, Nguyen Thi Thu Huong
University of Economics and Business Administration – TNU

ABSTRACT

In this paper we study the fully fourth order nonlinear boundary value problem

$$u^{(4)}(x) = f\left(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)\right), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = u''(1) = u'''(1) = 0. \tag{2}$$

where $f : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ is continuous.

We reduce the problem to an operator equation for the right-hand side function. Under some easily verified conditions on this function in a specified bounded domain, we prove the contraction of the operator. This guarantees the existence and uniqueness of a solution of the problem and the convergence of an iterative method for finding it. Some examples demonstrate the applicability of the proposed approach and iterative method.

Key words: *Boundary value problem; Nonlinear; Fully fourth order; Existence and uniqueness of solution; Iterative method*

Received: 20/12/2018; Revised: 04/01/2019; Approved: 28/02/2019

* Corresponding author: *Tel: 0917 333725, Email: kimquykttn@gmail.com*

GIỚI THIỆU

Nhiều bài toán trong vật lý, cơ học và một số lĩnh vực khác thông qua mô hình toán học dẫn đến việc giải các bài toán biên đối với phương trình vi phân với các điều kiện biên khác nhau. Bài toán giá trị biên phi tuyến cấp bốn gần đây đã được một số tác giả nghiên cứu như Alve, Bai, Li, Ma, Feng, Minhos,… Các công cụ được sử dụng là lý thuyết bậc Leray- Schauder [1], định lý điểm bất động Schauder trên cơ sở sử dụng phương pháp đơn điệu với nghiệm dưới và nghiệm trên [2], [3] hoặc giải tích Fourier [4]. Tuy nhiên, trong các bài báo đó, các điều kiện đưa ra phức tạp và khó kiểm tra, trong đó hạn chế về điều kiện Nagumo và điều kiện tăng trưởng tại vô cùng của hàm vế phải. Với phương pháp đơn điệu, giả thiết tìm được nghiệm dưới và nghiệm trên luôn luôn cần thiết nhưng việc tìm chúng nói chung không dễ dàng. Mặt khác, một số bài báo chưa có ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Khác với cách tiếp cận của các tác giả đó, chúng tôi đưa bài toán ban đầu về phương trình toán tử đối với hàm vế phải. Ý tưởng này đã được chúng tôi nghiên cứu thành công đối với bài toán giá trị biên phi tuyến cấp bốn với điều kiện biên khác (2), xem [5].

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập được sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1), (2) và sự hội tụ của phương pháp lặp. Các điều kiện của định lý đưa ra đơn giản và dễ kiểm tra. Chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ trong trường hợp biết trước nghiệm chính xác và trường hợp chưa biết trước nghiệm chính xác để minh họa cho hiệu quả của phương pháp.

SỰ TỒN TẠI DUY NHẤT NGHIỆM

Để nghiên cứu bài toán (1), (2) với $\varphi \in C[0,1]$, ta xét phương trình toán tử

$$\varphi = A\varphi, \tag{3}$$

trong đó A là toán tử được xác định như sau

$$A\varphi(x) = f\left(x, u_\varphi(x), y_\varphi(x), v_\varphi(x), z_\varphi(x)\right), \tag{4}$$

với

$$y_\varphi(x) = u'_\varphi(x), v_\varphi(x) = u''_\varphi(x), z_\varphi(x) = u'''_\varphi(x). \tag{5}$$

Ở đây $v_\varphi(x), u_\varphi(x)$ được xác định từ các bài toán

$$\begin{cases} v''_\varphi(x) = \varphi(x), & 0 < x < 1, \\ v_\varphi(1) = v'_\varphi(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} u''_\varphi(x) = v_\varphi(x), & 0 < x < 1, \\ u_\varphi(0) = u_\varphi(1) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

Ta có nếu $\varphi(x)$ là nghiệm của (3), trong đó A được xác định bởi (4)-(7) thì $u_\varphi(x)$ là nghiệm của bài toán (1), (2) và ngược lại.

Với $M > 0$ ký hiệu

$$D_M = \left\{ (x,u,y,v,z) \middle| \, 0 < x < 1, |u| \le \frac{M}{24}, \right. \tag{8}$$

$$\left. |y| \le \frac{M}{8}, |v| \le \frac{M}{2}, |z| \le M \right\}$$

và $B[O,M]$ là hình cầu đóng tâm O với bán kính M trong không gian các hàm liên tục $C[0,1]$ với chuẩn

$$\|\varphi\| = \max_{0\le x\le 1} |\varphi(x)|.$$

Ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.1.

Giả sử tồn tại các số $M, c_0, c_1, c_2, c_3 \ge 0$ sao cho

$$|f(x,u,y,v,z)| \le M, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &|f(x,u_2,y_2,v_2,z_2) - f(x,u_1,y_1,v_1,z_1)| \le \\ &c_0|u_2-u_1| + c_1|y_2-y_1| + c_2|v_2-v_1| + c_3|z_2-z_1| \end{aligned} \tag{10}$$

với mỗi

$(x,u,y,v,z), (x,u_i,y_i,v_i,z_i) \in D_M \ (i=1,2).$

Khi đó, toán tử A định nghĩa bởi (4), trong đó v_φ, u_φ là nghiệm của các bài toán (6), (7), là ánh xạ từ $B[O,M]$ vào chính nó. Hơn nữa, nếu

$$q = \frac{c_0}{24} + \frac{c_1}{8} + \frac{c_2}{2} + c_3 < 1 \tag{11}$$

thì A là toán tử co trong $B[O,M]$.

Chứng minh. Lấy hàm φ bất kỳ thuộc $B[O,M]$. Với phép đặt

$\varphi(x)= f\left(x,u(x),u'(x),u''(x),u'''(x)\right), v=u''$,
khi đó bài toán (1), (2) trở thành

$$\begin{cases} u^{(4)}=\varphi(x), & 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=u''(1)=u'''(1)=0. \end{cases} \quad (12)$$

Bài toán này có nghiệm duy nhất biểu diễn dạng

$$u(x)=\int_0^1 G(x,t)\varphi(t)dt, \quad (13)$$

trong đó hàm $G(x,t)$ có dạng

$$G(x,t)=\begin{cases} \left(\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}\right)x+\frac{t}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3, 0\le x\le t\le 1 \\ -\frac{t^3}{6}(1-x), \quad 0\le t\le x\le 1 \end{cases}$$

Từ (13) ta có

$$u'(x)=\int_0^1 G_1(x,t)\varphi(t)dt, \quad (14)$$

trong đó

$$G_1(x,t)=\begin{cases} \frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+tx-\frac{1}{2}x^2, 0\le x\le t\le 1 \\ \frac{t^3}{6}, \quad 0\le t\le x\le 1. \end{cases}$$

Ta có, với $x\in[0,1]$

$$\int_0^1 \left|G(x,t)\right|dt\le\frac{1}{24}, \int_0^1\left|G_1(x,t)\right|dt\le\frac{1}{8}. \quad (15)$$

Từ (13)-(15) ta có

$$\|u\|\le\frac{1}{24}\|\varphi\|, \|u'\|\le\frac{1}{8}\|\varphi\|. \quad (16)$$

Để đánh giá $\|u''\|,\|u'''\|$ ta chú ý nghiệm của bài toán (6) có thể biểu diễn dạng

$$v(x)=\int_0^1 G_2(x,t)\varphi(t)dt, \quad (17)$$

trong đó $G_2(x,t)$ là hàm Green

$$G_2(x,t)=\begin{cases} t-x, & 0\le x\le t\le 1 \\ 0, & 0\le t\le x\le 1. \end{cases}$$

Ta có

$$\int_0^1\left|G_2(x,t)\right|dt\le\frac{1}{2}, x\in[0,1]. \quad (18)$$

Do đó, theo (17) ta có

$$\|u''\|=\|v\|\le\frac{1}{2}\|\varphi\|. \quad (19)$$

Ta viết lại (17) dạng

$$v(x)=\int_0^x (t-x)\varphi(t)dt. \quad (20)$$

Từ đây ta có

$$v'(x)=-\int_0^x \varphi(t)dt, \quad (21)$$

và do đó

$$\|u'''\|=\|v'\|\le\|\varphi\|. \quad (22)$$

Theo (5), (16), (19), (22) và $\|\varphi\|\le M$ ta có

$$\begin{aligned} &\|u\|\le\frac{1}{24}\|\varphi\|, \|y\|\le\frac{1}{8}\|\varphi\|, \\ &\|v\|\le\frac{1}{2}\|\varphi\|, \|z\|\le\|\varphi\|. \end{aligned} \quad (23)$$

Do đó, $(x,u,y,v,z)\in D_M$ với $x\in[0,1]$. Theo (4) và điều kiện (9), ta có $A\varphi\in B[0,M]$, tức là A là toán tử từ $B[0,M]$ vào chính nó. Giả sử $\varphi_1,\varphi_2\in B[0,M]$ và u_1,u_2 là các nghiệm của bài toán (12) tương ứng với φ_1,φ_2. Ta ký hiệu $y_i=u'_i, v_i=u''_i, z_i=v'_i, (i=1,2)$. Khi đó, ta có $(x,u_i,y_i,v_i,z_i)\in D_M \ (i=1,2)$ với $x\in[0,1]$. Từ đánh giá (23) ta có

$$\begin{aligned} &\|u_2-u_1\|\le\frac{1}{24}\|\varphi_2-\varphi_1\|, \|y_2-y_1\|\le\frac{1}{8}\|\varphi_2-\varphi_1\|, \\ &\|v_2-v_1\|\le\frac{1}{2}\|\varphi_2-\varphi_1\|, \|z_2-z_1\|\le\|\varphi_2-\varphi_1\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Từ (4) và (10) ta có

$$\begin{aligned} &\left|A\varphi_2-A\varphi_1\right| \\ &=\left|f\left(x,u_2,y_2,v_2,z_2\right)-f\left(x,u_1,y_1,v_1,z_1\right)\right| \\ &\le c_0\left|u_2-u_1\right|+c_1\left|y_2-y_1\right|+c_2\left|v_2-v_1\right|+c_3\left|z_2-z_1\right|. \end{aligned}$$

Với đánh giá (24) ta được

$$\|A\varphi_2-A\varphi_1\|\le\frac{c_0}{24}+\frac{c_1}{8}+\frac{c_2}{2}+c_3.$$

Do đó, A là toán tử co trong $B[0,M]$ nếu điều kiện (11) được thỏa mãn. Bổ đề được chứng minh.

Đinh lý 2.1. *Với các giả thiết của Bổ đề 2.1, bài toán (1), (2) có nghiệm duy nhất* u *thỏa mãn đánh giá*

$$\|u\| \le \frac{M}{24}, \|u'\| \le \frac{M}{8}, \|u''\| \le \frac{M}{2}, \|u'''\| \le M. \quad (25)$$

Chứng minh. Ta có nghiệm của bài toán (1), (2) là hàm $u(x)$ thu được từ các bài toán (6), (7) trong đó φ là điểm bất động duy nhất của ánh xạ A. Đánh giá (25) thực chất là đánh giá (23).

PHƯƠNG PHÁP LẶP

Ta xây dựng phương pháp lặp và đánh giá sai số của nghiệm.

Xét quá trình lặp sau:

1. Cho $\varphi_0(x) = f(x,0,0,0,0)$. (26)
2. Biết $\varphi_k(k=0,1,...)$ giải liên tiếp hai bài toán

$$\begin{cases} v''_k = \varphi_k(x), & 0 < x < 1, \\ v_k(1) = v'_k(1) = 0, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} u''_k(x) = v_k(x), & 0 < x < 1, \\ u_k(0) = u_k(1) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

3. Cập nhật

$$\varphi_{k+1} = f(x, u_k, u'_k, v_k, v'_k). \quad (29)$$

Đặt $p_k = \frac{q^k}{1-q}\|\varphi_1 - \varphi_0\|$. Ta được kết quả sau

Định lý 3.1. *Với các giả thiết của Bổ đề 2.1, phương pháp lặp trên hội tụ với tốc độ cấp số nhân và thỏa mãn các đánh giá:*

$$\begin{aligned} &\|u_k - u\| \le \frac{p_k}{24}, \quad \|u'_k - u'\| \le \frac{p_k}{8}, \\ &\|u''_k - u''\| \le \frac{p_k}{2}, \quad \|u'''_k - u'''\| \le p_k, \end{aligned} \quad (30)$$

trong đó u *là nghiệm chính xác của bài toán (1)-(2).*

Chứng minh. Phương pháp lặp trên chính là phương pháp xấp xỉ liên tiếp tìm điểm bất động của toán tử A với xấp xỉ ban đầu (26) thuộc $B[O,M]$. Do đó, nó hội tụ với tốc độ cấp số nhân và có đánh giá

$$\|\varphi_k - \varphi\| \le \frac{q^k}{1-q}\|\varphi_1 - \varphi_0\|. \quad (31)$$

Kết hợp đánh giá này với đánh giá (24) ta thu được (30). Do đó, định lý được chứng minh.

Để giải số theo phương pháp lặp, ta sử dụng lược đồ sai phân với độ chính xác cấp bốn cho bài toán (27)-(28) trên lưới đều $\varpi_h = \{x_i = ih, i = 0,1,...N; h = 1/N\}$, trong đó N là số điểm lưới. Kí hiệu $error = \|u_k - u_d\|$ là sai số giữa nghiệm xấp xỉ ở bước lặp thứ k và nghiệm chính xác, trong đó u_d là nghiệm chính xác của bài toán. Phép lặp thực hiện cho đến khi sai số giữa 2 nghiệm xấp xỉ liên tiếp

$$e_k = \|u_k - u_{k-1}\| \le 10^{-8}. \quad (32)$$

Sau đây, ta xét một số ví dụ minh họa cho tính ứng dụng của các kết quả lý thuyết thu được trong cả trường hợp biết trước nghiệm chính xác và chưa biết trước nghiệm chính xác.

VÍ DỤ

Ví dụ 1.

Xét bài toán

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = \frac{-u'''}{24} - \frac{u'}{4} - u^2 + 4x + (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x)^2 \\ \qquad - 3x^2 + x^3 + 89/4, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = u''(1) = u'''(1) = 0. \end{cases}$$

Nghiệm chính xác của bài toán là hàm

$$u(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x.$$

Trong ví dụ này

$$f(x,u,y,v,z) = \frac{-z'''}{24} - \frac{y'}{4} - u^2 + 4x + (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x)^2 - 3x^2 + x^3 + 89/4$$

Trong D_M ta có

$$|f(x,u,y,v,z)| \le \frac{M}{24} + \frac{M}{32} + \left(\frac{M}{24}\right)^2 + \frac{97}{4} \le M.$$

Do đó, ta chọn $M = 28$ đảm bảo $|f(x,u,y,v,z)| \le M$.

Khi đó, trong miền D_{28}, vì

$$|f'_u| \le \frac{M}{12}, |f'_y| \le \frac{1}{4}, |f'_v| \le 0, |f'_z| \le \frac{1}{24}$$

nên có thể lấy các hệ số Lipschitz $c_0 = \frac{7}{3}, c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{24}.$

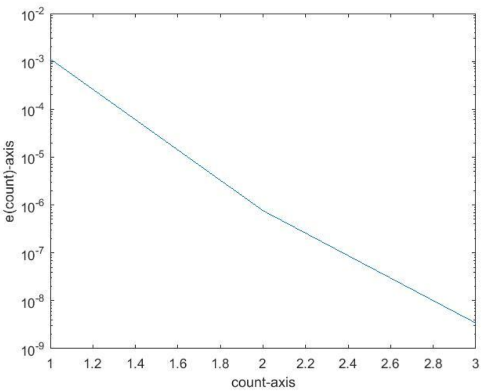
Khi đó $q = \frac{c_0}{24} + \frac{c_1}{8} + \frac{c_2}{2} + c_3 \approx 0.17 < 1.$

Tất cả các điều kiện của Định lý 2.1 đều thỏa mãn. Do đó bài toán có nghiệm duy nhất và phương pháp lặp hội tụ.

Với điều kiện dừng (32), N=100 thực nghiệm cho thấy quá trình lặp thực hiện sau 3 bước. Khi đó

$$e_3 = 3.4088.10^{-9},\ error = 3.5665.10^{-11}$$

Sự hội tụ của phương pháp lặp trong Ví dụ 1 được cho trong Hình 1.



Hình 1. *Đồ thị của e_k trong Ví dụ 1*

Ví dụ 2.

Xét bài toán

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = \frac{-u'''}{24} - u^2 u''^2 + \frac{u'}{2} + \sin \pi x + 1, 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = u''(1) = u'''(1) = 0. \end{cases}$$

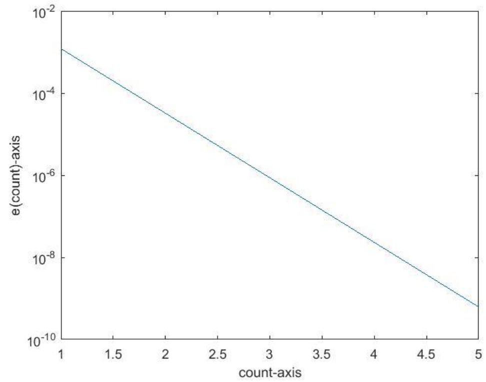
Trong ví dụ này

$$f(x,u,y,v,z) = \frac{-z}{24} - u^2 v^2 + \frac{y}{2} + \sin \pi x + 1.$$

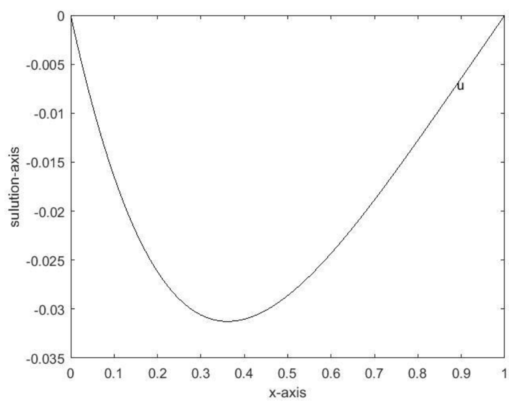
Tương tự như ví dụ 1, ta có thể chọn $M = 3$, khi đó các hệ số Lipschitz trong Bổ đề 2.1 là $c_0 = \frac{9}{16}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{64}, c_3 = \frac{1}{24}.$ Khi đó $q = \frac{c_0}{24} + \frac{c_1}{8} + \frac{c_2}{2} + c_3 \approx 0.15 < 1.$ Tất cả các điều kiện của Định lý 2.1 đều thỏa mãn. Do đó bài toán có nghiệm duy nhất và phương pháp lặp hội tụ

Thực nghiệm số với $N = 100$ chỉ ra với điều kiện dừng (32), quá trình lặp thực hiện $k = 5$ bước và e_3=6.1780.10^{-10}.

Sự hội tụ của phương pháp lặp trong Ví dụ 2 được cho trong Hình 2 và đồ thị nghiệm xấp xỉ được minh họa trong Hình 3.



Hình 2. *Đồ thị của e_k trong Ví dụ 2*



Hình 3. *Đồ thị nghiệm xấp xỉ trong Ví dụ 2*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. M. Pei, S.K. Chang, (2011), "Existence of solutions for a fully nonlinear fourth-order two-point boundary value problem", *J. Appl. Math. Comput.*, 37, 287–295.

2. Z. Bai, (2007), "The upper and lower solution method for some fourth-order boundary value problems", *Nonlinear Anal.*, 1704–1709.

3. J. Ehme, P.W. Eloe, J. Henderson, (2002), "Upper and lower solution methods for fully nonlinear boundary value problems", *J. Differential Equations*, 180, 51–64.

4. Y. Li, Q. Liang, (2013), "Existence results for a Fourth-order boundary value problem", *J. Funct. Spaces Appl.,* 5. Article ID 641617, Volume, 5 pages.

5. D.Q. A, N.T.K.Quy, (2017), "Existence results and iterative method for solving the cantilever beam equation with fully nonlinear term", *Nonlinear Anal.,* 36, 56-68.